PRODUZIONI

RELATIVE AL

PROGRAMMA

DI TRE QUISTIONI GEOMETRICHE

PROPOSTO DA UN NOSTRO PROFESSORE.

Mathematici partibus defungitur, non qui aliorum inventa exscribere, memoria tenere, aut recitare data occasione potest; sed qui ab aliis proposita, invenire et eruere novit ipse.

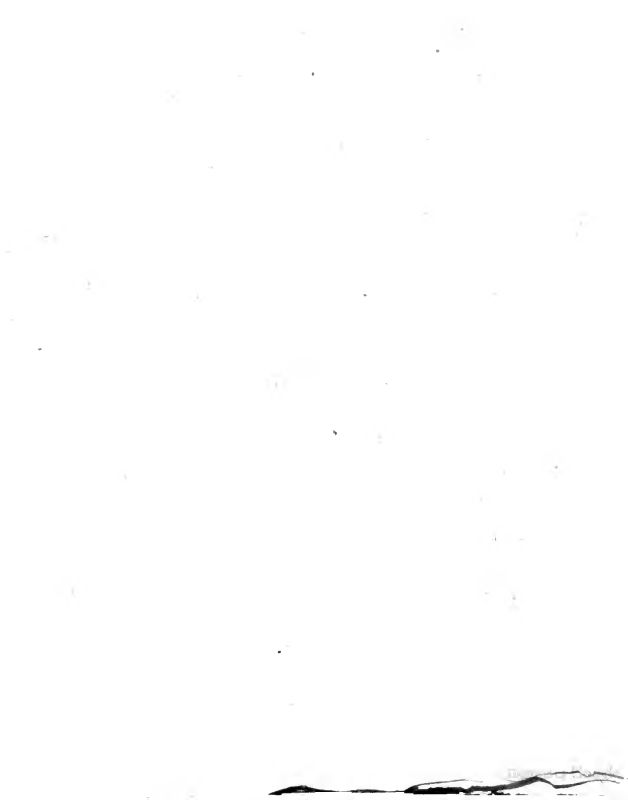
JAC. BERNOULLI.

IN NAPOLI
Nel marzo del 1840.

PARTE PRIMA

PROGRAMMA

E

DISPUTAZIONI SU DI ESSO.

PROGRAMMA

DESTINATO A PROMUOVERE E COMPARARE

I METODI PER L' INVENZIONE GEOMETRICA

presentato

A' MATEMATICI DEL REGNO DELLE DUE SICILIE

nell' aprile del 1839.

e di nuovo riprodotto nell' ottobre seguente, con la giunta
di alcune noterelle giustificanti.

DICHIARAZIONE

'ER LA PRESENTE RISTAMPA DEL PROGRAMMA.

Pacis et concordiae studioso satius esset injurias vincere ferendo, quam odiosas contentiones obire ulciscendo. Verum cum patientia nostra pro ignavia habetur, silentium pro confessione criminis, et superam calumniam jam nova sequitur contumelia, omnino respondendum est, ne nobismetipsis deesse videamur.

Taylor - *Apologia ec. – Transact. 1719.*

Alcuni giorni dopo la pubblicazione del programma, un nostro giornale produceva innominato avviso, di non doversi tener conto del terzo quesito proposto, e così espresso: *Iscrivere in una data piramide triangolare quattro sfere, le quali si tocchino tra loro, e tocchino le facce della piramide*; perchè *più che determinato*, *ed impossibile*: la quale sola combinazione di condizioni non congruenti, bastando a mostrare l'imperizia geometrica degli autori dell'avviso, nessun ascolto fu però ad essi dato.

Presentatesi in Accademia, nella prima tornata del passato agosto, alcune risposte al programma, credei conveniente di preparare a' miei colleghi della classe matematica ciò, che poteva agevolare ad essi il giudizio a pronunziare su quelle risposte; e però lessi nella seconda tornata di tal mese alcune mie *Considerazioni su i tre quesiti proposti a premio*, che saranno quì appresso pubblicate.

Comparve allora dopo pochi giorni una risposta al programma, cioè a' primi due quesiti di esso; e pel terzo, rivenendosi dall'erronea manifestazione a caso avventurata, si tacciava solamente per mal proposto, e però, a non perder tempo, si tralasciava, senza nè men degnarlo di correzione. E siffatta scempia produzione non mancò di chi fosse pari ad accoglierla.

Rimasti ancor questa volta senza risposta, lasciandosi giudicar al pubblico del merito di un tal lavoro; e volendone assolutamente una coloro, che si dimostravano sì accaniti avverso un tal mio operato, che a dir vero non credeva dovesse sì esacerbar ad essi la bile, pubblicarono in terzo luogo una impropriamente detta *prefazione* all' opuscolo già dimenticato. Ed in questa si disputava di metodi con franchezza incredibile; e non pur de' geometrici, a' quali solamente io mi limitava nel programma; ma tutti ad un tratto comprendendoli in un fascio, e di tutti dando giudizio in brevi note, e pesando nella loro rozza bilancia il merito degli antichi e de' moderni geometri, e se più valesse Newton che Archimede, e più de la Grange di quello: e quando mancasse alcuna dramma a compiere la misura di loro autorità, non mancavano d'improntarla da taluno anonimo autor moderno, che a qualche loro collega l'avesse comunicata in secreto. Ed è degno di particolare avvertenza trovarvisi spesso attribuito a sommi matematici

ciò, che mai poterono pur immaginare; poichè contrario alla lor mente, e ad ogni ragion geometrica: e non dee far però maraviglia, se ancor a me si faccia dire nel programma talune cose, che non solamente non le pensai giammai; ma che anzi vi ho dimostrato un intendimento tutto diverso. Che però io non trovo miglior espediente, per mostrare al pubblico la falsità di sì impudenti asserzioni, che quello di riprodurre, senza il minimo cambiamento, il programma stesso, permettendomi solo aggiugnervi qualche nuova noterella, indicandola con lettera; e ponendole insieme in fine del medesimo: ed abbandono dopo ciò questa faccenda troppo troppo puerile all' imparziale giudizio del pubblico, pel cui rispetto solamente mi sono questa volta indotto a scrivere.

Una cosa rimane a me tutta propria, ed è di togliere a que' spontanei contraddittori al programma ogni sospetto, che io avessi voluto con questo gettar loro il guanto di una disfida; il che non so persuadermi ancora ch' essi potessero di buona fede pensare: e m'induco piuttosto a credere, che ponessero ciò innanzi ad iscusare il loro mal animo, e forse mi si permetta dirlo, per prendere occasione d' *inclarescere inimicitiis*. Ed in vero qual motivo poteva mai indurmi a discendere a simile bassezza? Che forse coloro, cui è tornato conto di ciò malignamente asserire, potevano ignorare esser io alla fine di mia lunga carriera, essi nel principio, o sta-

zionarj a mezzo il corso; tener io, ed aver sempre tenuti, da che cominciai a professar le Matematiche, e sono gli anni parecchi, i primi gradi a'quali un uomo di mia classe possa aspirare; aver io istruiti, e promossi tanti, che ora con dignità seggono in cattedre, o in accademie, il che non possono, senza ingratitudine, negare essi medesimi, che ora verso me conduconsi con tanta indecenza. Inoltre aver io cercato di esimermi da nuovi incarichi, e nuove commissioni, facendo ciò tornare a loro vantaggio. Finalmente essermi, ne' diversi rincontri, sempre adoperato a far acquistare riputazione e nome a coloro, che cercano spingersi nell'ardua carriera di professar le Matematiche, pubblicando anche talvolta a mie spese qualche loro lavoro. Qual ragione avrei dunque avuta ora, che cerco assolutamente chiudere la mia carriera, di uscire in mezzo a sfidare i miei concittadini coltivatori della stessa mia scienza, per volontà di demeritarli? Il mio unico scopo è stato ed è, il ripeto, per tentare se mai fosse possibile di far terminare tante vane dispute su' metodi in Geometria, che assai pregiudicano a' progressi delle Matematiche, ed alla buona istituzione in esse, che di giorno in giorno va presso noi decadendo. Nè vi sarà alcuno certamente tra' miei colleghi, che oserà in ciò smentirmi, osservando quanta sia ora la difficoltà di provvedere gli stabilimenti d' istruzione di buoni professori di Matematiche, mentre prima se ne abbondava; ed il vedere quanta sia la po-

chezza di conoscenze matematiche di coloro, che agli esami a' gradi accademici presso la R. U. degli studj si presentano, o ad altri per l' esercizio di professioni, che delle Matematiche abbisognino, sebbene elementarissimi, e tali al certo, che un tempo non avrebbero dato alcun pensiero a' più mediocri allievi di nostre scuole. E sono d' ordinario coloro, che da taluna delle attuali vengono pieni di orgoglio, e poveri di scienza, vantando sublime istituzione, e disprezzando l' antica senza conoscerla, che veggonsi ignorare fin le nozioni più comuni, che non v' ha giovine di prima istituzione con regolar metodo, che non conosca perfettamente. Di che credo inutile aggiugner particolari, non essendovi tra noi chi non ne convenga.

Io non ho più una scuola a me propria, come l' ebbi fino al 1812, essendone usciti non pochi, che, come ho detto, or tengono posti distinti, e che a quell' epoca dismisi, non tanto per mancarmi il tempo di bene assisterla, che per non comparire soverchiamente avido, e compromettere il mio decoro, facendo da esaminatore di coloro stessi, che aveva prima istituiti; giacchè a quell' epoca mi ritrovava in tutte le commissioni di esami per promozioni ad impieghi sì civili che militari. Lo so pur troppo, che ora da altri non pensasi a questo modo; ma io vissi in quel tempo, e però errai con gli altri miei coevi di allora: il mio errore fu però vantaggioso al pubblico;

poichè nè si usavano deferenze negli esami, nè si vedevano in conseguenza di esse le pubbliche istituzioni del Governo depravate, ed andate a male. Non avendo dunque una scuola, e volendo, per quanto a me potesse riescire, cercar di rimettere in buon cammino l'istituzione, non seppi, col mio corto intendimento, vedere altro mezzo, che quello di ricorrere al programma che proposi. Mi sarò forse ingannato, ma di buona fede, ed a mio non altrui danno; e senza offesa di alcuno de' buoni professori, de' quali non è interamente estinta presso noi la sementa, e che con me deplorano un falso sistema, che altri vogliono a forza di pompose, ed audaci parole sostenere. Nè poi era questa la prima volta che io aveva manifestate le mie idee, e tenuto lo stesso linguaggio di ora; e tra le altre noterò quella in cui pubblicai fin dal 1822, dopo averla presentata alla nostra Accademia, una dissertazione *sul metodo in Matematiche*, *sulla maniera di scrivere e compilare gli Elementi di queste scienze*, *e sull' insegnamento delle medesime*; che avrebbero pur dovuto, i poco decenti risponditori al programma, degnarla di un loro sguardo, prima di spingersi a mal dire. Si avrebbe avuto forse più ragione d' incollerirsi allora, che non dovevasi adesso, perchè ho proposte ad esercizio tre quistioni, volendo così anche profittare delle altrui ricerche, per compiere argomenti in nostra scuola utilmente, e ripetute volte trat-

tati: ma a quel tempo, il decadimento non era ancor giunto al segno di ora; ed a' buoni istitutori non si altera la bile perchè la scienza si rianimi; anzi ciò torna a loro conto ed essi il desiderano. Ed è ancora per siffatta ragione, che ho scelto per trattato della mia cattedra, nel prossimo anno di lezioni, il seguente: *Disquisitiones analyticae in methodos geometrico-algebricas*. Si vorrebbe con ciò forse imputarmi, che volessi sfidare il pubblico napoletano per intero? nò certamente il protesto, io non voglio che compiere la mia carriera istruendo, e lealmente, non impostu- rando, come si costuma da alcuni oggigiorno; io fo guerra al falso ed erroneo metodo d'insegnare, e cerco di sostenere e convalidare il buono, che un tempo ha prodotti in gran numero uomini distinti. Potrà avvenire che, per le mie deboli forze, non riesca; ma avrò fatto il mio debito, e meriterò se non lode, almeno di esser compatito da' miei concittadini, conoscendo, che dopo aver per tanti anni insegnato, e cercato promuovere in ogni modo l' istituzione matematica nel mio paese, per non veder poi distrutta ogni buona opera del Fergola, e de' miei colleghi, mi sono anche esposto ad esser martirizzato da coloro, che al presente fanno dell' istruzione della gioventù mercato.

Siffatta protesta, servirà anche di risposta alla troppo avvanzata dimanda, del perchè io avessi limitata la mia proposta a' soli miei concittadini. Io non era si au-

dace da tentar tutta l' Europa: nè poi vedeva altrove quel bisogno, che scorgeva nel mio paese; poichè anzi ben mi accorgo coltivarsi da per tutto, con sobrietà e giudizio, ogni metodo d' inventare, e prodursi lavori giudiziosi, da indicar veri progressi di nostra scienza, non retrogradamento. Ma poteva darsi, ecco un' altra sciocca sfuggita de' contradditori al programma, che tra noi non si fosse trovato chi avesse potuto trattar le quistioni con l' analisi pura, alla quale non so perchè si pretende assolutamente che io miri a far torto; ed allora come giudicare della prevalenza de' metodi? Al che risponderò brevemente, col dire, che professo le Matematiche da ben quarant' anni nel mio paese, e sono necessariamente in mezzo ad esso, e non ignoro perciò tutto quello che le concerne; e quindi ben mi attendeva, da' contradditori al programma, non una risposta d' ingiurie, che non sono se non indizio di debolezza e di mal animo, ma una risposta giudiziosa. E poi io aveva però scelte quistioni a diverse riprese trattate da sommi uomini, sul cui valore ne' metodi non cadeva alcun dubbio; e da questi più che da altri avrei tratto, e trarrò materiale ubertoso pel parallelo che mi ho proposto, e che prego ad attendere che lo esponga, e non giudicarmi alla cieca così senza conoscerlo, imitando un nostro concittadino, autore pur esso di alcune produzioni matematiche, alle quali mai alcuno rivolse lo sguardo, che cominciò una sua diatriba contro l' *Intendi-*

mento umano del celebre Giovanni Locke, protestandosi di non averlo letto; d'immaginarsi però ciò che potesse dire.

Ma alle ragioni poc' anzi accennate, e che mi avevano determinato alla scelta di queste tre quistioni, or posso con sicurezza aggiugnere, che mai altre si potevano meglio prestare allo scopo prefissomi, a cagione delle nuove escogitazioni derivate dalle ricerche in esse fatte, tendenti a rischiarare la loro natura, e quella de' problemi in generale; e ad abbattere tutti gli errori, che nella risposta al programma si sono, per imperizia geometrica, propalati. Ed i moderni geometri ed analisti, che desiderano, come me, veri progressi delle Matematiche, e vi si adoprano con infinito studio, vedranno con piacere, e sorpresa, non pur d' essersi adempito al primo quesito nel modo strettissimo dimandato; ma ancora assegnata di quel problema un' elegante geometrica soluzione, non dipartendosi dagli stessi principj dal de la Grange adoperati, per semplicemente avviare la sua, che di tanta difficoltà in costruirla era stata giustamente riputata, da' più distinti matematici. E si vedrà pure, non senza gran soddisfazione, un problema sì difficile, nel caso semplicissimo del triangolo e del cerchio, esteso alle curve coniche ed al poligono in generale, tanto con l' antica, che con la moderna analisi, senza dipartirsi dalla soluzione assegnata per quel primo ca-

so, riducendone la costruzione all' operazione geometrica la più elementare. Finalmente avvertiranno essi la proteiforme natura di tal problema, che con una singolarità tutta propria, e stranissima, ne' diversi casi, salta ad un tratto da determinato a più che determinato, e da questo ad indeterminato, senza nè men passare pel grado intermedio. E così da esso solamente potranno i risponditori al programma, con più chiarezza rilevare i loro errori manifestati sulla natura del terzo quesito.

Nè meno importanti, e grate a' geometri dovran riescire le ricerche sul secondo quesito, di cui ne appariranno due eleganti soluzioni geometriche, ed una analitica; e si vedrà da esse direttamente estesa la soluzione alle ellissi simili, oltre il gran numero di verità nuove ed importanti, alle quali le ricerche stesse hanno condotto, e che arricchiscono sempre più il vasto campo, ed immensurabile della Geometria, e perciò difficile a percorrerlo, senza un corredo di grandi conoscenze, e profondo studio ed esercizio; e quelle potranno utilmente adoperarsi in altre ricerche affini. Finalmente da' tentativi già fatti osiamo promettere ancora del terzo problema una compiuta soluzione. Ed il ripeto, io spero che tante pene che mi ho prese, e mi prendo, e le inquietudini ingiustamente, e da poca onestà prodottemi, saranno felicemente coronate, dal veder una volta terminate le vane, e

sciocche dispute sulla prevalenza de' metodi, e rimessa sul buon cammino presso noi l' istituzion matematica, che da pochi guastamestieri, per coprir loro ignoranza, si cerca depravare.

Nulla ho creduto dover rispondere all' altra insulsa proposizione, che non sia il mezzo da me adoperato conducente allo scopo prefissomi di comparare i metodi, e che da semplici problemi il progresso non si ottenga delle scienze matematiche; poichè di risposta l' una e l' altra cosa non ha bisogno. Ma pure mi piace quì di passaggio accennare, che non in altro modo pensò la R. A. delle Scienze di Parigi, per far terminare la lunga ed accanita quistione sulle leggi della comunicazione del moto; ed i programmi che propose per gli anni 1824 e 1826 contribuirono non poco all' effetto da essa desiderato; e che gli *Atti di Lipsia*, quelli *di Berlino*, le *Transazioni filosofiche*, *ec.*, e le opere de' sommi matematici, che onorarono il XVII° e XVIII° secolo, tra le quali principalmente quelle del Leibnitz, e de' fratelli Bernoulli (*),

(*) Gioverà qui notare il principio del *Programma* pubblicato da Giov. Bernoulli in Groninga nel 1697, dirigendolo *acutissimis qui toto orbe florent mathematicis*. » *Cum compertum habeamus, vix quicquam esse quod* » *magis excitet generosa ingenia, ad moliendum quod conducit augendis* » *scientiis, quam difficilium pariter, et utilium quaestionum propositionem;* » *quarum enodationе, tanquam singulari si qua alia via, ad nominis* » *claritatem perveniant; sibique apud posteritatem aeterna extruant monumen-* » *ta: sic me nihil gratius orbi mathematico facturum speravi, quam si*

sono piene di quistioni proposte nel modo da me fatto; e che essi credettero così contribuire all'avanzamento delle Matematiche; e non s'ingannarono. Sicchè i contraddittori al programma non dovrebbonsi mostrare tanto annojati della mia proposta, alla quale nessuno gl'imponeva obbligo di rispondere, per dimostrarsi incivili; e potevano col loro abbandono far conoscere al pubblico di poco curarla: il quale utile consiglio accetterò ben io per me medesimo, in caso di nuova noja, che si pensasse darmi; giacchè non sono disposto a perdere in inutili polemiche quel tempo, che appena mi resta per adempiere a quanto ho promesso. Ed uniformando il fine di questa mia dichiarazione all'epigrafe che vi messa in principio, conchiuderò, come il Taylor la sua APOLOGIA: *Res ipsas exposui, peroratione non utar, harum enim taedet. Nec si quidquam regesserint contradictores, ulterius respondere necesse habebo. A contumeliis nos semel vindicare, et jus et ratio postulat; ulterius non expedit.*

» *imitando exemplum tantorum virorum* MERSENNI, PASCHALII, FERMATII,
» *praesertim recentis illius anonymi Aenigmatis Florentini* (V. Viviani),
» *aliorumque, qui idem ante me fecerunt, praestantissimis hujus aevi ana-*
» *lystis proponerem aliquod problema*, QUO, QUASI LAPIDE LYDIO, SUAS
» METHODOS EXAMINARE, *vires intendere, et, si quid invenirent, nobiscum*
» *communicare possent; ut quisque suas exinde promeritas laudes a nobis,*
» *publice id profitentibus, consequeretur.*

PROGRAMMA, ec.

Proponere problemata in publicum non caret utilitate, hac enim ratione excitantur et acuuntur ingenia, ac saepe aliquid eruitur in scientiae incrementum, quod alioquin forte absconditum mansisset.

Jo. Bernoulli *Act. Erudit. Lips. an. 1739.*

La scienza del matematico non è riposta nella pura e semplice conoscenza delle verità che la costituiscono, ma in quella de' metodi di essa, e nel saperne valutar l' energia, ed a proposito adoperarli. Nella scuola greca uno era il metodo d' inventare, e però questo fu da que' sommi geometri altamente approfondito e coltivato: e quantunque a noi meno attivo ci sembri, che forse per quelli era, non potendolo ravvisare in tutte le sue parti, e nel rapporto che queste avevano [*]; fu però esso nelle loro mani una potentis-

---

[*] Noi ignoriamo in qual modo essi classificassero i problemi, e ne determinassero la natura, prima d' intraprenderne la soluzione; in qual modo ne eseguissero la riduzione; come ne distinguessero i casi, e le diverse soluzioni, di che abbiamo chiaro argomento di doverne essere istruiti, anche per quelle che corrispondono alle radici or dette *negative*, come in una mia *Memoria*, che di breve presenterò alla R. Accademia delle Scienze, farò rilevare. Assai poco sappiamo del modo come riducessero le loro soluzioni a que' tanti luoghi, che si avevano appositamente preparati, tra' quali il celebratissimo delle tre, quattro, o più rette. Non ci è per-

sima leva per molte scoperte, le quali con grande esattezza condotte a fine, appariscon sempre da straordinaria chiarezza accompagnate; e molte di esse sono pe' moderni come il mezzo da convalidar le loro. La Geometria si mostra in quelle pura e senza velame; e l' animo di chi le considera rimane pienamente soddisfatto e rischiarato (*b*). Da ciò dee ripetersi, che nella scuola greca queste scienze camminassero con progressivo aumento, sebbene con quel passo misurato, ch' era proprio del metodo che adoperavasi, fino ad Apollonio; dopo il quale esse restarono per alcun tempo stazionarie, pel comun fato ch' ebbe ogni dottrina.

Ritornarono dopo secoli ad apparire tra noi italiani, e fino al secolo XVII. coltivossi da' nostri maggiori il metodo stesso degli antichi, sebbene imperfettissimo per essi; e le opere di quelli si andavano grandemente ricercando, e studiavansi, e con molto impegno traducevansi, e le perdute restituivansi; e la Geometria n' ebbe anche nuovi vantaggi, principalmente nella scuola del Galilei (*c*).

Sorta la moderna Analisi, ed applicatasi alla Geometria, i moderni acquistarono sugli antichi la prevalenza per questa parte, di posseder due metodi, da procedere all' invenzione geometrica: e con questo novello metodo più agevole ad apprendersi, più comodo, e più maneggevole, essi compensaronsi abbastanza delle risorse che

---

venuto, nè possiamo ancora indovinare bene cosa fosse quel materiale artificiosissimo de' *Porismi*, tanto utile per essi nella soluzione de' problemi più difficili, del quale ne fu autore Euclide; e ci mancano molte altre opere importanti del loro *Luogo Risoluto*: che però la conoscenza che noi abbiamo del loro metodo non può essere che assai imperfetta; e pur questa è valuta, ed è stata, presso que' moderni coltivatori di esso, un mezzo da tentare le ricerche più ardue in Geometria, e pervenire anche là dove non riesciva l' Analisi moderna (*a*).

loro mancavano dell' antico (*d*). Ma educati anche in questo, ad esso sempre rivolgevansi; e le loro ricerche, sebben fatte con l'Analisi moderna, avevano vero sapor geometrico, e ricevevano dalla Geometria luce e conferma. Per tal modo progredendo la Geometria analitica, non solamente essa avanzavasi di molto, ma l' Analisi benanche. Nè vi sarà chi possa negare, che molte ricerche importanti per la teorica delle equazioni debbano alla Geometria la loro origine, ed il loro perfezionamento. Sommi uomini apparirono a quest' epoca felicissima per le Matematiche, in ogni angolo di Europa, che così conviene indicarli, nel gran numero che se ne ebbero, e tutti di merito distintissimo: e questi non si dipartirono mai dalla conoscenza de' due metodi; che anzi esultavano allor quando, non ostante l' energia dell' Analisi moderna, lor potesse riescire di convalidare col metodo degli antichi qualche ricerca, che a quella puramente appartenesse (*f*). E di ciò molti tratti s' incontrano nelle loro opere, tra le quali, per disegnare le più prossime a noi, citerò solamente quelle del marchese de l' Hopital, de' fratelli Bernoulli, e dell' Eulero. E questo ed il Cramer portarono la moderna Geometria analitica all' apice di sua grandezza, accoppiando sempre la Geometria al metodo analitico, che come istrumento, e non come principale vi adoperavano.

I nuovi metodi sommatorj presero anche, com' è notissimo, dalla Geometria la loro origine; e per convalidarne l' esattezza, convenne dimostrare che ad essa ritornavano; sicchè senza di questa avrebbero mancato della veste di loro genuinità (*g*). La Meccanica stessa, a cominciar dal Newton principalmente, dovè alla Geometria, accoppiata sagacemente all' Analisi moderna, i suoi progressi. Opere classiche si videro venir fuora in ogni genere di ricerche matematiche, sempre accoppiando e facendo andar a paro la Geometria, e

l' Analisi ; ed ogni nazione ebbe così una numerosa scuola di matematici, de' quali continua divenne la sorgente. Finalmente questi medesimi progressi delle Matematiche, ed il ripiegar che incessantemente facevasi verso un metodo, che più agevole rendevasi nell' apprendimento, e nel maneggio, fece poco a poco aberrare dalla Geometria ; ed il metodo delle antiche scuole cominciò a coltivarsi esclusivamente da taluni, non però scompagnandolo dalla conoscenza profonda della moderna Analisi : nel che si distinse principalmente la scuola inglese, seguendo le orme segnate ad essa dall' immortal Newton ; e nel continente quella de' Bernoulli, e l' Italiana. Nessuno certamente ardirà dire, che il Newton, l' Halley, il Cotes, il Moivre, il Taylor, i Bernoulli, i Riccati, il Frisi, e tanti altri sommi matematici, che fin oltre la metà del passato secolo produssero tanto innanzi i metodi della scienza che professavano, ignorassero la moderna Analisi, e fossero stati puri coltivatori del metodo degli antichi ; coloro da cui questa riconosceva vantaggi moltissimi. Ma essa ebbe finalmente il suo corifeo nella persona dell' illustre sig. de la Grange, che dopo averla spinta per la parte istrumentale tanto in là, quanto era mai possibile, segnandovi que' limiti, che alcuno non ha potuto dopo lui sormontare ; quasi sdegnando, che in quella parte ove era di ragione secondaria alla Geometria, dovesse necessariamente dipenderne, ed a questa servire, fece tutti gli sforzi per sottrarnela, istituendo una maniera di trattare i problemi geometrici, incastonandone i dati e 'l quesito in formole generali, dalla combinazion delle quali, eliminando anche il bisogno delle figure, dovesse risultarne quell' equazione, che menasse alla risoluzione del problema. Egli stesso però non giunse mai, per gli ardui problemi che con tal metodo ebbe tentati, ad ottener questa desiderata equazione in costruibil forma : ed il suo

gran nome fu ad altri occasione di molti sforzi, e di molta perdita di tempo in riescirvi: ed istituzioni di Geometria analitica similmente compilate si videro dopo ciò comparire [a].

Noi non entriamo per ora a discettare sul merito di questa novella analisi geometrica ridotta ad arte combinatoria, e che sommette la risoluzione de' problemi al metodo delle eliminazioni, il più imperfetto dell' analisi moderna; dal che può talvolta risultare ignoto il grado, e la natura del problema che vuol risolversi, se prima non siavisi in altro modo provveduto, e che il metodo degli antichi, o il Cartesiano abbiano fatto quello riconoscere (*k*). Ma solamente fin da principio col Fergola ci dolevamo, che ciò tornasse a danno di questi due preclari metodi, cui la Geometria e le Matematiche in generale tanto dovevano. E però volendo col fatto convincerne i mo-

---

[a] Il primo esempio, che di questa nuova maniera di trattare i problemi geometrici diede il de la Grange, incontrasi nelle ricerche ch' ei presentò alla R. A. delle Scienze di Berlino *sulla piramide triangolare*, inserito nel volume per l' anno 1773, ove manifestamente afferma, poter queste interessare i geometri tanto pel metodo, che pe' risultamenti, soggiugnendo, che il loro andamento sia puramente analitico, e potersi intendere senza figure: conchiudendo in fine, che indipendentemente dall' utilità diretta che tali soluzioni potranno avere in molti rincontri, serviranno principalmente a mostrare con quanta facilità e successo il metodo algebrico possa essere impiegato in quistioni, che sembrano essere il più dipendenti dalla Geometria propriamente detta, e le meno proprie ad esser trattate col calcolo. Qual fosse però il risultamento di tali ricerche, e quanto valessero rimpetto alle stesse soluzioni proccurate con l' analisi degli antichi, può ognuno rilevarlo, dal confronto di tal memoria del de la Grange, con quella inserita nel vol. I. degli Atti della nostra Accademia delle Scienze (*h*). Posteriormente gli analisti francesi Monge e Lacroix si valsero di que' principj, per compiere in forma scientifica una nuova Geometria analitica, che fu detta, e l'è *a due e tre coordinate*.

derni coltivatori di esso, e mostrar loro la necessità di non deviare interamente da' già conosciuti metodi, ci determinammo a pubblicare alcuni *opuscoli matematici* di nostra scuola, ne' quali tratto tratto inserimmo talune ricerche, da cui i difetti, o la minor perfezione di questa moderna Geometria analitica, si potessero più di leggieri ravvisare. A tal fine ripigliando le tracce già con tanto successo segnate in nostra scuola dal Giordano, pel celebratissimo problema del Cramer anche generalizzato, ne recammo le diverse soluzioni comparandole tra loro; altra elegantissima ne aggiugnemmo del nostro collega Scorza, e molte ricerche affini pur trattammo in breve, che della considerazione dell' Eulero, e de' suoi distintissimi allievi Fuss e Lexell erano state degne; ed una delle principali Accademie di Europa, si aveva recato a sommo pregio d' inserirle ne' suoi *Atti*. E dopo tutto ciò così conchiudevamo: *Preghiamo i coltivatori della Geometria analitica a due e tre coordinate, di voler risolvere e costruire giusta i loro metodi, e per nostro gradimento i problemi generali di quelle mirabili iscrizioni, e di altre ricerche affini*. Nè però dal lungo periodo corso di ventotto anni queste nostre preghiere sono state anche in minima parte esaudite (*l*).

Più innanzi il Fergola, a nostra spinta, s' indusse a farci pubblicare le soluzioni de' problemi *de Inclinationibus* universalizzati, il quale argomento costituiva un anello della seconda parte della sua *Arte d' Inventare*, di cui già fin dal 1809 avevamo pubblicato il prospetto: e nell' introduzione ad esso, che come prove di fatto proponevamo, per porre al confronto l' efficacia de' metodi geometrico, e geometrico-analitici, più di un' opportuna riflessione facevamo al proposito, sulla insufficienza per molti riguardi della modernissima Geometria *a due e tre coordinate* (*m*).

Rimasti infruttuosi questi tentativi, quel sommo uomo, mirando più da vicino la cosa, volle istituire un parallelo di fatto tra i mezzi della modernissima Geometria analitica e 'l metodo Cartesiano, col confronto delle istituzioni di Geometria sublime trattate nell' uno e nell' altro modo; e quindi nel 1814 ci permise di pubblicare il suo *Trattato analitico* delle *Sezioni coniche*; e de' *luoghi geometrici* per esse, opera elaboratissima, compiuta nel suo genere, e piena di ricerche nuove, difficili ed importanti; e dalla quale grandissimo vantaggio ritrarranno coloro, che per la buona strada cercheranno avviarsi all' invenzione geometrica col metodo analitico de' moderni. In essa passo a passo, e nella prefazione, ed in note, e negli scolj vien dimostrato ove difetti il novissimo metodo a *due coordinate* [1]. Ma quest' opera sebbene scritta con in-

---

[1] Volendo qui notare alcuni solamente di tali luoghi, che ci son caduti sottocchio, percorrendo una tale opera, indicheremo nella *pref.* il §. 3., ove l' autore una per una enumera le mancanze, che ravvisansi nelle modernissime istituzioni analitiche sulle curve coniche, nè dopo ciò possiam dire che finora siesi, da' compilatori posteriori di esse, ciò corretto; ed il §.4, ove egli adombra il nuovo metodo analitico; e la seconda noterella alla pag. 5. Inoltre la nota a pag. 28, ove la conchiusione sembra riguardare un problema difficile risoluto col metodo a due coordinate, da un distinto professore napoletano educato in nostra scuola (a); e l' altra a pag. 41, nella quale di proposito compara gli effetti de' due metodi geometrico-analitici, facendo rilevare la grandissima efficacia e chiarezza del Cartesiano sul proposito. Altro difetto in cui suole inciamparsi da' coltivatori del modernissimo metodo geometrico-analitico fa osservare nella nota a pag. 45. E sono pure da considerarsi le note a pag. 101, 138. Ma senza andar un per uno enunciando tali luoghi; tutto questo trattato del Fergola serve egregiamente all' oggetto, ch' egli si aveva prefisso di dimostrare, cioè, quanta prevalenza abbia il metodo geometrico-analitico sul puro analitico de' moderniori. Nè aveva pur mancato di

dicibile facilità e chiarezza, riesciva ancor troppo laboriosa, per la varietà delle ricerche tutte importanti che vi si contengono, a coloro che al presente amano di diventar presto risolvitori di problemi, già in più modi e con eleganza risoluti, contentandosi che le loro soluzioni risultino comunque, purchè possano dichiararsi autori di un opuscolo, ed anche di un libro, ed imporne al volgo; e però dobbiam credere, che costoro alcuna pena non abbiansi mai data di approfondirla, e forse che non l' abbiano nè men guardata, o che non ne conoscano l' esistenza, come per tutte le opere classiche di nostra scienza di presente avviene, le quali in breve tempo sono pur divenute viete, e condannate ad essere ornamento di libreria, ed a figurare al più nelle storie che di quella si scrivono (*p*).

Non potendo dunque riescire a convincer costoro direttamente, discorrendola con essi sul valore e sull' estensione de' metodi; poichè ciò supporrebbe la conoscenza di questi, e ci trarrebbe di quistione; non dal modo tenuto per lo passato, più innanzi indicato, e che era un mezzo di fatto: e vedendo di giorno in giorno andar presso noi le matematiche declinando, mentre vantansi da taluni ibridi progressi; abbiam preso l' espediente di rinnovellare l' antico sistema, che ne' due passati secoli fu di valevolissimo sprone a far grandemente progredir le matematiche, cioè quello di dimandare a' nostri matematici le soluzioni di due problemi, e rinuovar loro la dimanda di altra volta [4], proponendo a chi vi adempisse, con le condizioni che verranno assegnate, il premio di una medaglia di oro

---

fare qualche avvertimento sul proposito, a vantaggio della Geometria antica nelle note a' §§. 40, 51 del lib. I. delle sue *Sezioni Coniche sintetiche* (*o*).

[4] Di questo stesso espediente si era prevalso il Viviani a' suoi tempi, per coloro che, troppo cultori del nuovo metodo Cartesiano, disprezzavano l' antica ana-

di ducati sessanta per ogni quistione, non a titolo di compenso, che nè pari alla nobiltà della scienza, e de' coltivatori di essa, nè al servigio importante che a questa si rende, si potrebbe da noi dare; ma semplicemente per offrire un contrassegno pubblico e permanente al merito di tanta operazione (q).

I soggetti che proponiamo a' nostri colleghi matematici napoletani, ed a' valorosi giovani che battono ora questa nobilissima carriera, sono notati nelle due seguenti pagine,

---

listi, proponendo, *singulis litterario in Orbe degentibus hodie praeclarissimis analystis*, il celebre *enigma geometrico*, *ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam jacere audent, silere discant, vel potius maxima cum voce exclament: Oh! unica verorum sciscitabilium scientia a Divina in hominum mente infusa, ut haec inperviis, mutabilibus, fallacibusque contemptis, aeterna ista, quae semper et unicuique sunt eadem, tantum appetat, nihilque aliud unquam magis innocuum scire perquirat*.

I.

» Esibire la corrispondente convenevole costruzione geometri-
» ca della soluzione analitica data dal de la Grange del problema di :
» *Iscrivere in un data cerchio un triangolo i cui lati passino per*
» *tre punti dati*, non dipartendosi affatto da que' medesimi princi-
» pj da quel sommo analista stabiliti, per pervenire all' equazione
» finale del medesimo; e compierne poi, con gli stessi principj, la
» dimostrazione analitica (*r*).

Se di un tale argomento occupossi nulla meno che lo stesso Eulero, il quale dubitò forte della possibilità di una costruzione elegante della soluzione analitica del Lagrange; e se il suo discepolo Lexell, dopo molti e lunghi giri di analisi non potè giugnere a compierla; sarà certamente degno di gran lode quel nostro matematico, che ritentando un tale argomento, valesse a perfezionarlo nel modo da noi dimandato.

Il vantaggio che ritrarremo dalla buona riescita di questo lavoro, sarà di compiere interamente tutto quello che riguarda un problema famoso, che in nostra scuola è stato in più modi ripetute volte trattato, reso generale, ed esteso ad altre ricerche affini; e del quale non si ha per anco alcuna adequata analitica soluzione.

II.

P R O B L E M A.

Iscrivere in un triangolo dato di specie di grandezza tre cerchi, i quali si tocchino tra loro, e tocchino i lati del triangolo.

Un caso semplicissimo di questo problema, quando, cioè, il triangolo dato fosse isoscele, formava parte del problema detto *trigemello* da Giacomo Bernoulli, che ne diede una soluzione analitica nel lemma II. della sua dissertazione, ove imprese a risolvere un tal problema trigemello, proposto per pubblico affisso nelle piazze di Amsterdam, mentre egli colà dimorava (*s*).

Ed appunto nel nostro problema generale, dopo essersene per incidenza occupato un distinto matematico italiano, si sono impegnati più dotti professori italiani, francesi, e tedeschi; ed ultimamente una delle maggiori accademie di Europa l' ha pure accolto ne' suoi Atti; sicchè non v' ha dubbio, che sia opera di molto merito il tentare di più elegantemente risolverlo.

La soluzione che ne dimandiamo potrà o esser fatta col metodo degli antichi, distendendone anche la corrispondente composizione geometrica, o pure con l' analisi Cartesiana; o finalmente col modernissimo metodo a due coordinate; dirigendo noi specialmente a' nostri sagaci cultori di esso questa ricerca, per saggiar la forza e l' estensione di un tal metodo. In questi due secondi casi però dovrà darsene la conveniente costruzione e dimostrazione, non dipartendosi da que' principj, che hanno servito all' analisi, e derivandole dalle formole stesse di questa (*s'*).

Un tal problema servirà di convenevole supplemento a' pro-

blemi delle *Tazioni*, egregiamente risoluti dall' insigne nostro socio Fergola, pubblicati fin dal 1809, ed in seguito consegnati nel vol. I. degli Atti della nostra R. A. delle Scienze (*t*).

III.

PROBLEMA.

Iscrivere in una data piramide triangolare quattro sfere, le quali si tocchino tra loro, e tocchino le facce della piramide.

Un tal problema, non mai proposto, e tentato da altri, per quant' è a nostra notizia, potrà anche venir risoluto col metodo degli antichi, con l' analisi Cartesiana, o con quella a tre coordinate (*u*).

La soluzione di esso compirebbe ad un tratto le due Memorie del prof. Flauti, l' una *de' Contatti sferici*, e l' altra della *Piramide triangolare*, inserite nel vol. I. degli Atti della stessa R. A.

MODO DI PRESENTARE LE MEMORIE, E DI GIUDICARNE.

Sono assegnati per rispondere a' quesiti proposti tre mesi, a contare dal primo del maggio prossimo: che però, per tutto il dì ultimo di luglio seguente, i concorrenti al premio dovranno far pervenire in mano del segretario perpetuo della R. A. delle scienze, cav. Monticelli, le loro Memorie, distinte da un semplice motto, e senza segnarvi affatto il loro nome, che noteranno in una scheda ben suggellata, sulla quale verrà scritto lo stesso motto [1].

Nella prima tornata del venturo mese di agosto il segretario perpetuo presenterà le Memorie inviategli, chiuse come sono, al presidente dell' Accademia, il quale apertele in presenza di questa, le firmerà, pagina a pagina, insieme col segretario perpetuo, e co' tre seniori; ed indi saranno mandate alla classe matematica pel corrispondente esame, che dovrà terminarlo nello spazio di due mesi; sicchè possa renderne conto all' Accademia nella prima tornata del novembre venturo. Il segretario della classe leggerà ad essa ciascuno scritto, e potrà anche ogni socio della medesima dimandarlo, per considerarlo particolarmente; e della discussione, che avrà avuto luogo, se ne prenderà notizia nel *processo verbale* corrispondente. Il parere dovrà da ciascuno esser dato per iscritto: raccolti i pareri dal segretario della classe, questa si riunirà di nuovo, per leggerli e discuterli in comune, e stabilire il risultamento di essi come il voto della classe, che verrà registrato, per rilevarsene poi alla fine, nel caso che siensi avute più soluzioni di una stessa delle quistioni pro-

[1] La R. A. delle Scienze di Napoli si è compiaciuta di gentilmente accogliere la preghiera del proponente le quistioni, ed i premj, di far ricevere dal suo segretario perpetuo le risposte, e farne giudicare del merito dalla sua classe matematica.

poste , quella che si stimerà la più elegante, alla quale verrà aggiudicato il premio , e pubblicata nel volume degli Atti dell'Accademia, se questa lo troverà conveniente , o pure stampata separatamente . Lo stesso per quella , o quelle, che saranno state credute degne dell' *Accessit* .

Le Memorie non approvate , dopo essersi bruciate le schede che l' accompagneranno , in presenza dell' Accademia , rimarranno depositate nell' archivio di essa .

NOTE AGGIUNTE AL PROGRAMMA

NELLA PRESENTE RISTAMPA.

(*a*) Tra le altre perdite, che i giusti apprezzatori del loro metodo deplorano, bisogna notare tutto quel materiale da essi preparato, per la composizione de' problemi *ipersolidi*, o *lineari*, riguardantè le superficie curve, e le linee in esse segnate; del che, in più luoghi delle sue *Collezioni*, offre sicuro argomento *Pappo*, tra' quali è degno di esser qui recato il seguente, dopo la prop. XXX del lib. IV. : *Antiqui geometrae datum angulum rectilineum tripartito secare volentes, ob hanc causam haesitarunt. Problematum, quae in Geometria considerantur, tria esse genera dicimus, et eorum alia quidem* plana, *alia* solida, *alia vero* linearia *appellari. Quae igitur per rectas lineas et circuli circumferentiam solvi possunt, merito dicuntur* plana, *lineae enim per quas talia problemata inveniuntur in plano ortum habent. Quaecunque vero solvuntur, assumpta in constructionem aliqua coni sectione, vel etiam pluribus, solida appellata sunt, quoniam ad constructionem solidarum figurarum superficiebus videlicet conicis uti necessarium est. Relinquitur tertium genus problematum, quod* lineare *appellatur, lineae nam aliae praeter jam dictas in constructionem assumuntur, quae va*rium et difficilem ortum habent, ex inordinatis superficiebus, et motibus implicatis factae. *Ejusmodi vero sunt etiam* lineae, quae in locis ad superficiem dictis inveniuntur, et aliae quaedam magis variae, et multae a *Demetrio Alexandrino* εν ταις γραμμικαις επιστασεσι, *hoc est in linearibus aggressionibus, et a Philone* Tyaneo *ex implicatione* πλεκτοειδων, *et aliorum varii generis superficierum inventas, quae multa et admirabilia simptomota continent; et nonnullae ipsarum a junioribus dignae existimatae sunt de quibus longus sermo haberetur. Una autem aliqua ex ipsis est, quae et admirabilis a Menelao appellatur.* . . . . . .
Al che potrebbesi aggiugnere tutto quello, che, relativamente allo stesso argomento, come estesamente trattato dagli antichi, ha lasciato notato Proclo, in più luoghi del suo importante comentario.

Note aggiunte.

Or io credei superfluo, nel pubblicare il programma, di riandar tutte queste cose, delle quali già mi trovava aver fatto altra volta menzione, nella prefazione alla *Geometria di Sito*, ed in diversi luoghi di essa; poichè non credeva, che il programma dovesse diventare un trattato elementare dimostrativo di ogni cosa, che vi si asserisce, nè poteva supporre, che esercitati professori tali cose assolutamente ignorassero: nel che essendo stato avvertito in contrario dalla *risposta* fatta ad esso, ove agli antichi geometri, non che non aver mai avuto metodo d' inventare, ogni conoscenza in quel genere di ricerche si è audacemente tolta, mi sono creduto nell' obbligo di brevemente ripeterne qualche cosa, alla quale aggiugnerò per conferma, ciò che dice il celebre Cramer, nella prefazione alla sua elaboratissima opera *Introduction a l'Analyse des lignes courbes algébriques*, alla cui mente dichiaro di uniformarmi, tanto più che la costui autorità, non mi sarà al certo tacciata di soverchia addizione alla Geometria antica. » Aussi (ecco com' ei dice) les courbes ont elles toujours fait un des principaux » objets des speculations des géométres. A peine la Géométrie sortoit elle de l'en» fance, qu' elle s' ocenpa des *Sections coniques*: bientôt après elle admira les » propriétés de la *Concoide*, de la *Cissoide*, des *Spirales* (courbes tres différents » de celles que nous designons par ce nom, et qui sont les *Hélices des anciens*) *et* » *de plusieurs autres lignes, dont le nom et la connoissance a péri* avec la plûpart des » monuments de l'ancienne Géométrie «. E tralasciando la continuazione di questo ragionamento, ove il celebre autore esattamente espone il merito dell' Analisi algebrica, noteremo ad istruzione la conseguenza che ne trae: »Il y a donc, ce semble » de l'humeur, et une sorte de caprice, à mepriser une méthode si utile, et à faire » gloire de n'employer que l' Analyse géométrique des anciens. *Celle-ci, je l'avoue* « *a sur l' Algébre le mérite d' une evidence plus sensible*, *et d' une certaine élégance* » *qui plait infiniment*; mais il s' en faut beaucoup qu' elle soit aussi commode, et » aussi universelle. *Donnez lui donc, si vous voulez, la préference*; *mais ne donnez* » *point d' exclusion a l' autre methode*. Les vérités mathématiques ne sont pas si fa» ciles à trouver, qu' on doive chercher du mérite à se fermer quelcune des rou» tes qui peuvent y conduire «. Ecco come ragionava un gran geometra ed analista; e lo stesso ragionevolissimo consiglio, ch' egli in ultimo luogo dà, aveva già espresso il de Tschirnausen, introducendosi alla sua Memoria *de dimensione curvarum*, inserita negli Atti di Lipsia pel 1695, dicendo: *Cum variae in Mathesi dentur viae*, *ad easdem veritates inveniendas ducentes*, *plurimum in*

so ponendum est studii, simplicissima ut investigetur. E così hanno sempre pensato, e detto tutt' i sommi matematici: che forse la scienza si fosse ora cambiata, per opera de' contraddittori al programma?

E poichè la circostanza presente me ne porge opportuna l'occasione, non voglio tralasciare di render pubblica testimonianza di rispetto al già fu ottimo professor Brunacci, il quale in una sua lettera da Milano, in data del 9 febbrajo 1817 così scrivevami: » Nella mia lettera, nella quale la ringraziava della di lei bel» la opera *Geometria di Sito ec.*, che gentilmente mi aveva voluto mandare in re» galo, le prometteva di scriverle un'altra volta dopo averla letta, Eccomi a com» piere la promessa. Io ho con gran piacere gustata l'opera sua, e particolarmente » le cose sulle *plectoidi*. Oh come noi andavamo lungi dal vero, credendo nuova » interamente la dottrina di quelle curve generate dal moto di una retta nello spa» zio! Convengo con lei, che *troppo i moderni hanno abbandonate le vie battute da» gli antichi, e che utilissimo sarebbe a quelle di nuovo avvicinarsi*. Ella segua la » sua luminosa carriera ad onore della nostra Italia . . . . Che direbbe ora se vivesse, in sentir profferire tante sciocchezze nella *risposta al programma*, che non par mai vero, che tante se ne avessero potuto ammassare? E lo stesso sentimento del Brunacci, che ho qui preferito, perchè comunemente giudicato più degli altri matematici italiani de' suoi bei tempi dedito all' Analisi algebrica, di che non disconvengono gli stessi contraddittori al programma, mi hanno, in divers' incontri manifestato tutti gli altri illustri matematici italiani suoi contemporanei, che tralascio nominare, per non essere infinito.

Raccogliendo dunque ciò che qui ho sparsamente accennato, conchiuderò, non aver mancato gli antichi di estesissima conoscenza sulle linee curve in generale, e sulle superficie curve; ma bensì aver mancato della facilità in classificarle, esprimendone la natura per la corrispondente equazione, dalla quale i principali sintomi di esse più agevolmente deduconsi; il che forma gran vantaggio pel metodo algebrico. Al contrario però averci essi sopravanzato nell' assegnare delle curve che consideravano tutte le proprietà geometriche, ed in adoperarle nella costruzione de' problemi ipersolidi; al che noi non siamo per anco pervenuti. Donde sempre più si dimostrerà ragionevole la conchiusione poc' anzi recata del Cramer, che ripeterò in senso inverso, dicendo: *Coltivate quanto volete i metodi algebrici, essi sono universali e comodi, e più facilmente apprendonsi e si adoprano; che però per mezzo di essi si è aperta la porta del-*

l'invenzione a parecchi spiriti, pe' quali sarebbe restata sempre chiusa senza questo soccorso. Ma non trascurate di coltivare il metodo antico, nelle cose geometriche, e di leggere e meditare le opere profonde de' greci maestri, dalle quali si raccoglie infinita scienza, da comprovare, rischiarare, e promuovere vie più la Geometria col metodo moderno.

(*b*) Credei che di questa mia proposizione non vi sarebbe stato alcuno, per poco usato che fosse nelle ricerche geometriche, con l'un metodo, o con l'altro, che non convenisse pienamente: ma poichè i contraddittori al programma nè men ne sono persuasi, il che per altro fa grande sorpresa, ho scelto a sgannarli, tra le tante autorità che potrei loro addurre (delle quali già quella del Cramer trovasi per incidenza riportata nella precedente nota), due luoghi di moderni analisti. Nel primo de' quali, ch'è dell'illustre Carnot, con profondità e penetrazione ne' due metodi, costui così ragiona: » La multiplicité des succés de » l'analyse, l'accord constant de ses résultats avec ceux qu'on pouvoit obtenir par » la synthése, *et le sceau de l'évidence apposé successivement par celle-ci à toutes* » *les découvertes de la première*, ont mis hors de doute la certitude de ces procé- » dés. Mais lors des premiers essais de cette méthode d'invention, on dut être fort » circonspect, et l'on n'osa mettre au jour les decouvertes operées par son mo- » yen, qu'apres les avoir fait passer par l'épreuve de la synthése . . . . . » On est devenu plus hardi a force de succés; et les résultats de l'analyse inspi- » rent aujourd'hui la même confiance que ceux de la plus rigoureuse synthése » (*Geom. de Position* §.14.) «. E di tutto questo, ch'è qui giudiziosamente det- » to dal Carnot, non vi sarà buono Istitutore in Matematiche il quale non ne sia convinto, e che non vegga però la necessità di far progredire a passo eguale il giovine, che si avvia nelle ricerche geometriche sì con l'un metodo che con l'altro: d'onde ancora, per la buona e perfetta istituzione, fa bisogno, come il dissi altra volta, nella mia *Dissertazione sul metodo in Matematiche*, ec., di far precedere, o al meno accoppiare l'insegnamento delle *Sezioni Coniche* esposte in forma geometrica, alle stesse trattate con l'analisi moderna. Su di che ancora que' contraddittori hanno trovato a ridire; e noi volentieri condoneremo ciò alla poca sperienza nell'insegnamento, di colui che ha dato il nome alla *Risposta*.

L'altra delle autorità è presa dal Lhuilier, il quale al proposito della soluzione generale da lui recata al problema del Cramer, così esprimesi: » Je » suis éloigné de vouloir mettre en parallèle avec *la marche lumineuse des anciens*

» *le procédé suivant purement algébrique.* Je sens trop(et je le sens avec satisfa-» ction) combien la Géométrie l'emporte dans ce cas sur l'Algébre. Je saisis au » contraire (avec l'auteur) cette occasion *d'engager les jeunes mathématiciens à ne » pas se livrer exclusivement aux méthodes de calcul ; mais à cultiver, au moins » dans leurs premières études, les méthodes anciennes avec plus de soin, que ne l'on » fait le plus grand nombre des calculateurs modernes* « . Dal qual luogo ben si rileva, che non siamo noi soli ad inculcare, che non debbasi tralasciare di coltivare con molto studio il metodo degli antichi, da coloro, che da' metodi analitici moderni voglion trarre vantaggio . .

Ad esso aggiugneremo ancora uno squarcio di altra lettera direttaci dal Brunacci, al proposito di avergli inviato il primo fascicolo degli *Opuscoli Matematici* ; il che servirà anche ad assicurare, che questa parte di essi, che comprendeva i primi tre opuscoli, era già conosciuta fin dal 1810, ch'è l'epoca della data di tal lettera, ove dicesi : » A lei rendo vivissime grazie dell'avermi mandato in » dono quel primo quinterno di *opuscoli matematici*. – Ella dice pur bene, che » trascurando la sintesi, i geometri si tarpano una delle due ali che hanno per sa-» lir sublime. A me è sempre piaciuta, e duolmi di essermi troppo lascia-» to trasportar dalla corrente. In questo nostro regno però si è cominciato a » rimettere in pregio la Geometria di Euclide, per l'educazione de' giovanetti. » . . . .

(c) Nella scuola del Galilei compironsi le fondamenta de' metodi sommatorj moderni, promovendo la Geometria ; e così preparavasi a gradi quel grande edifizio, che ne' metodi, e nella scienza della Natura dovevasi da' geometri posteriori, e col decorrere di più di un secolo, elevare. Il Newton fu ancor egli istituito nell'antica Geometria, ed apprezzatore grandissimo de' metodi di questa ; e però da esso potè darsi l'ultimo passo pel perfezionamento de' metodi sommatorj, e della Fisica sperimentale. Chi conosce la storia delle Matematiche, e sa contemplare i progressi dello spirito umano in esse, e la genesi delle scoperte fattevi, non dimanderà certamente perchè Galilei non fu Cartesio, e questi non fu Newton, conoscendo appieno, che vi bisogna una genesi successiva da un punto di tali scienze, nelle quali il caso non ha alcuna parte, ad un altro ; e questa è l'opera del tempo, e non di un solo uomo. Ma coloro che avevan detto, che gli antichi potettero produrre tante sublimi verità geometriche senza alcun metodo, ed a caso pervenendovi, potevano ancor soggiu-

gnere, che se nella scuola del Galilei si fosse coltivata esclusivamente l' analisi moderna, ed abbandonata la Geometria, si sarebbe di slancio pervenuto a rapire all' immortal Newton il merito, di essere lo scopritore delle vere leggi dell' Universo: e bisogna anche supporre senza aver conosciuta e stabilita quella dell' attrazione universale, che sicuramente non fu opera del calcolo numerico. Ma la scuola del Galilei sarà sempre contenta di aver promossa la Geometria, la Meccanica, e la scienza idraulica, e di aver lasciate opere, che il volger de' secoli non ha fatto, nè farà dimenticare; del pari che gli autori di esse.

(*d*) In questo luogo, e da altri del nostro programma, non pare che risulti la conseguenza, ch' è piaciuta trarne a' visionarj contraddittori di esso, che nel medesimo si volesse persuadere, che abbandonata l' Analisi moderna, si dovesse assolutamente coltivare l' antica. Ciò che si è sempre raccomandato in nostra scuola, e la maniera come vi si sono educati gli allievi in Matematiche, con loro grandissimo profitto, e della scienza, del che sono un esempio i contraddittori medesimi, è stata quella di accoppiar sempre la conoscenza dell' un metodo all' altro, valendosi all' uopo de' mezzi, che ciascuno poteva all' opportunità offrire; e tra gli altri argomenti di questa natura in essa dati, potremo citar, come pubblico e permanente, quello degli *Opuscoli*, e comprovarlo con tanti lavori geometrico-analitici, o assolutamente di pura analisi pubblicati in ogni tempo dal Fergola, e da' suoi discepoli, che hanno ad essi meritata la pubblica stima. E lo stesso Giordano, mentre dava del problema del Cramer generalizzato una soluzione, la quale, a giudizio del Lhuilier, *uguagliava al meno in eleganza tutto quello, ch' egli conosceva dell' analisi geometrica degli antichi*; ch' è quanto di più lusinghevole poteva dirsi per un giovinetto della sua età, non tralasciava, con estrema modestia, figlia di vero merito, e necessaria in chi vuol cominciare con profitto una carriera difficile, di confessare ingenuamente gli sforzi inutili da lui fatti, per risolvere il problema in modo puramente algebrico, e soggiugneva: » Sarebbe veramente cosa desiderabile, che » qualche perspicace algebrista si prendesse la pena di rinvenire una soluzione pu- » ramente analitica di un sì elegante problema piano, che nella semplicità non la » cedesse alla sintetica già rapportata. » Ed il Lhuilier, riportando questo luogo del Giordano, così conchiudeva: *Regardant avec raison la comparaison des méthodes comme un objet, qui doit principalement fixer l' attention des mathématiciens*. E ciò valga a manifestare quanta pur fosse l' imperizia di coloro, che anche in tal

proposito hanno osato attaccare il programma come superfluo, e da rigettarsi.

(*f*) Ciò conferma il già detto dal Carnot nella nota *b*, e la poco fa recata conchiusione del Lhuilier.

(*g*) Il d'Alembert, gran promotore dell'Analisi moderna, volendo confermare le fondamenta di quella degli infiniti, si sforza provare, che questo metodo sia a dirittura uniforme e dirivato da quello de' *limiti*, del principe de' geometri Archimede; ed il Leibnitz l'aveva già preceduto in definire Archimede per *vir stupendae sagacitatis, qui fundamenta posuit inventionum fere omnium, in quibus promovendis aetas nostra gloriatur.* E ciò serva di conferma all'onesta proposizione, che gli antichi non possedevano affatto metodi d'inventare.

(*h*) Nessuno certamente, che conosca la Geometria da una parte, e che sappia ancor valutare i grandi benefizj prodotti all'analisi moderna dal sommo de la Grange, ci attribuirà a bestemmia imperdonabile quella di aver detto, che costui, principe degli analisi, non lo fosse egualmente de' geometri.

(*k*) Di ciò convengono gli stessi buoni, e non capricciosi promotori di un tal metodo; e lo dimostrano abbastanza i tentativi da essi fatti in promuoverlo. Al che comprovare, recherò qui de' tanti luoghi del Gergonne, che reputo essere stato il promotore più valente del metodo *a due coordinate*, la seguente conchiusione di sua risposta al Poncelet, inserita negli Annali vol. VIII. » De mon » côté (così egli dice) je ne négligerai aucune des occasions que, mes courts » loisirs pourront m'offrir, pour multiplier les exemples du genre d'application » de l'analyse à la géométrie, *que je cherche à faire prévaloir;* et j'ose croire, que » la diversité de nos méthodes ne faira jamais naître d'autre rivalité entre nous, » que celle du zêle pour l'avancement de la science . . . . . . je m'empresse de » declarer, que sans oser affirmer que *la géométrie analytique puisse parvenir* » *jusque là, il me paraît au moins tres douteux qu'elle puisse y atteindre d'une* » *maniere facile*. E nella soluzione, che a forze riunite egli ed i suoi colleghi compilatori degli *Annali*, dopo molti stenti, riescirono a dare del problema *de' tre cerchi da iscriversi nel triangolo*, furono obbligati a confessare il loro metodo inabile a fargli pur riconoscere per molto tempo la natura del problema; e finalmente di non aver potuto pervenire che appena ad una soluzione aritmetica di esso. E gioverà pur notare qui di passaggio (giacchè questo argomento dovremo di proposito trattarlo nel parallelo de' metodi, che abbiamo più volte accennato), che il Puissant, nel suo *Recueil des propositions de Géo-*

métrie, tutte le volte che s' imbatte in equazioni a' problemi che risolve assai semplici, da poter condurre ad un agevole costruzione, non tralascia di eseguirla, dimostrando così apprezzare il merito delle ricerche geometriche : mentre poi se quelle si presentano in forma complicata, si contenta di considerarle come numeriche ; il che è manifestamente incompatibile con la mente di tutt' i geometri, e con la natura di que' problemi. Lo stesso per altri espositori del moderno metodo analitico puro. Nè dee pur tacersi, che quante volte essi possono esibir facilmente una geometrica dimostrazione di qualche verità, non tralasciano di farlo. E ciò prova che altrove si ha buon senso, e non capricci.

(*l*) Se ancor fosse vero, del che par che ci si faccia rimprovero, che non pur presso noi, ma eziandio al di fuori non si fosse dato ascolto alle nostre preghiere, non però dovremmo displacerci di nostra ragionevole dimanda : poichè già prima si è accennato, quanto fosse stata ben accetta a' sommi matematici la soluzione del Giordano, e dovremo ritornarvi nelle *Considerazioni ec.* E quindi possiamo con sicurezza conchiudere, che in pregio abbiasi pur dovuto poi avere quella generale dello Scorza, e le altre ricerche intorno a tal problema, da me e dal Giannattasio aggiunte negli *Opuscoli*, affini a quelle trattate dall' Eulero, e con maggior estensione dal Lhuilier (Vegg. la parte II. delle *Considerazioni, ec.*) il quale dovè essere ben contento in vedere come la Geometria antica, si fosse finalmente ben impossessata di un problema, ch' egli aveva tante desiderato, e nel medesimo tempo diffidato, che geometricamente si risolvesse. » Quelqu' attaché que je suis à la Géométrie des anciens (ecco com' egli esprimevasi) quelque regret que j' aye de la voir trop négligée ; je n'osai, je dois l'avouer, former des espérences sur son application à ce problème pris dans cette généralité...... Et je forme des désirs bien plus que des espérences sur une solution géométrique «. Ma pure osservisi, che noi pubblicavame gli *Opuscoli* suddetti nel 1811, e già tempo prima, ne avevame sparso il primo fascicolo (*Vedi nota b*) ; che però, trovande da quell' epoca ripetutamente trattato un tal problema, e le ricerche affini ne' distinti *annali delle Matematiche*, da diversi geometri ed analisti, e con diverso metodo, ci si potrebbe permettere il sospetto, che avessimo a ciò pur noi data una qualche spinta con quella proposta, la quale, se presso noi riescì inefficace a produrre col metodo analitico puro una nuova soluzione del problema particolare, lo fu almeno a farne conoscere riprodotta quella del Gergonne per lo stesso problema, il che non rimase senza profitto, e per nostra opera ;

a colui che si compiacque di rendere a' matematici napoletani sì importante servigio.

(m) Si riscontrino su tal proposito i tre opuscoli segnati co' n. IX. X. XI, nella raccolta più volte indicata.

(n) Veggasi la conchiusione della nota l.

(o) I contraddittori al programma si sono limitati a dire, che le ricerche dal Fergola notate come omesse nelle ordinarie istituzioni di *Analisi a due coordinate*, eran comprese nell'equazion generale alle curve coniche, e però non essere un difetto il trascurarle: e così pure altra volta fecero pubblicare, che ogni problema geometrico algebricamente risoluto doveva essere costruibile; poichè nella sua equazione era compresa la natura di esso, e quindi quanto per la costruzione bisognava. E noi non gli negheremo l'una e l'altra proposizione; ma gli soggiugneremo solamente, esser tali cose vere, come per l'appunto comprendevasi nel caos l'attuale Universo, pria che il sommo Iddio gli dasse separazione, forma, ed ordine. Noi non contendiamo di possibilità, ma di fatto, e non pur di fatto solamente, ma di facilità maggiore o minore ad ottener quelle verità dall'equazion generale: ed i contraddittori in parole, non so perchè non abbiano, ad esercizio di alcun loro allievo, fatte ricavare quelle facili conseguenze dall'equazion generale. Al che aggiugneremo, che in libri elementari non convenga tralasciar verità e problemi importanti, sul semplice riflesso di esser facili a rilevarsi: chè allora ben si potrebbe tutto tralasciare, limitando l'istituzione de' giovani a far loro conoscere quella semplice equazione generale.

(p) Di ciò ne presenta un chiaro argomento la risposta tutta de' contraddittori al programma.

(q) E qui si avverta non aver lo mai detto, offrire un sì tenue premio per compenso a chi risolvesse le quistioni proposte; che ben mi sarei guardato dal profferire simile indecenza, della quale mi hanno voluto anche far regalo i contraddittori al programma.

(r) Sebbene mi sia proposto di non entrare affatto in esame del merito delle risposte stampate a' quesiti del programma, lasciando un tal giudizio al pubblico saggio ed imparziale; pure non posso fare a meno di accennare qui generalmente alcuna poca cosa su tale assunto. E per riguardo alla prima quistione, nella *risposta al programma*, non si è data la costruzione, nel modo dimandato; ma si è prolungata l'analisi fino a tramutare l'equazione del de la Grange, pro-

pria solamente pel cerchio, a quella che costruiscesi dal Gergonne, da potersi anche alle curve coniche estendere, nella quale i risponditori trasformano l' altra; e ciò è cosa ben facile ad ottenersi da qualunque scolarello, quando si abbiano presenti le due equazioni, cioè il luogo di partenza e quello dell' arrivo, potendo solo variarsi nel modo più o meno breve, come meglio a ciascuno può riescire. Ma non era questo ciò che chiedevasi nel programma, e che formò la difficoltà grandissima, per quella costruzione, dell' Eulero, de' suoi discepoli, dello stesso de la Grange, e di tanti altri sommi matematici, che vi si provarono. Nè tampoco si osserva nella risposta vestigio della dimandata dimostrazione: nè vale il dire ch' essa sia inutile; poichè l' era dimandata, bisognava adempiervi. Sarebbero state più ragionevolmente inutili le dimostrazioni de' problemi risoluti dagli antichi, con un' analisi breve e chiara, e senza ripieghi che ne disturbino l' andamento; e pure essi credettero necessario il compierne la composizione, recandone dopo la costruzione la dimostrazione: che *costruzione* e *composizione* sono cose ben diverse tra loro, essendo quella una parte di questa; che però erroneamente si è detto da essi alla pag. 6. della loro *Risposta*: *costruzione del problema, o sia composizione.*

L' essersi pur detto, che l' equazione del de la Grange fosse propria al calcolo numerico, l' è una sfuggita tutta nuova, degna di chi non sa distinguere tra costruzione, e valore; tra Geometria ed Aritmetica.

(s) Ecco un altro argomento per provare, che i grandi uomini ricevevano di buon grado le proposte di problemi, e se ne occupavano senza offendersene, e rispondere con ingiurie.

(s') Per coloro che non saranno abbastanza pratici nelle metamorfosi algebriche, nelle quali non può negarsi un merito singolare a' risponditori al programma, avvertiremo, non esservi nulla di nuovo nell' analisi presentata per tal problema, essendo la medesima che quella de' due distinti professori di Berlino Crelle e Lechmütz, come potrà ben rilevarsi, allorchè, con questa prevenzione, si riscontri la costoro soluzione, che daremo nella parte III. delle seguenti *Considerazioni*. E ricorderemo a tal proposito la ragionevolissima massima degli analisti, che: *Analysin constituunt praecepta, juxta quas deinde instituitur calculus; qui non analysis est, sed instrumentum analyseos. Praeceptis semel potitis, quivis facile calculum instituit, more quisque suo; hic prolixius, ille magis concinne, prout unicuique faverit Minerva.*

Note aggiunte.

(t) A distruggere ancora, nell' animo de' dotti contraddittori, lo scrupolo di aver io detto, che *un tal problema servirebbe di convenevole supplemento a quelli delle* Tazioni, non debbo far altro, che produr loro innanzi il seguente titolo della Memoria del Paucker, inserita negli Atti di Pietroburgo pel 1831: esso è il seguente · *Sur une quéstion de Géométrie relative aux Tactions des cercles.* Mi lusingo che dopo ciò possa l'autorità di quest' Accademia quietarli su di un affare, che per se non ne aveva bisogno.

(u) Così ne giudicai allorchè scrissi il programma, non avendo avvertito a quello che se ne legge ripetutamente negli *Annales des Mathématiques*, che pubblicavansi in Lione da valenti geometri, enunciandovisi un tal problema nel seguente più general modo: · *In una piramide qualunque, ec.* Nè credo che per tale inavvertenza si voglia essere inesorabili verso me, mentre alcuno non l'è stato col Gergonne, principal compilatore di quella raccolta pregevole, per aver ignorata l' esistenza della soluzione del Malfatti del problema precedente, inserita non in un giornale, ma negli Atti di una delle più distinte società dotte di Europa.

Di questo problema non avendo i risponditori al programma trovato vestigio di soluzione, su cui fondar al solito le loro ricerche, ricorsero da prima all' espediente di annunziarlo per *più che determinato ed impossibile* (*Giorn.dell'*Omnibus *del dì 8 maggio 1839*); era questa la migliore sfuggita per liberarsi dà ogni obbligo di occuparsene. Avvertiti in seguito dalla lettura da me fatta in Accademia; nella seconda ternata di agosto, della gran diversità che passasse tra problema *più che determinato, impossibile*, e che abbisognasse di *determinazione*, ripiegarono nella *Risposta al programma* in darlo *come mal proposto*. E finalmente nella prefazione pubblicata in seguito, ora come mal proposto, ed ora come più che determinato si annunzia, e sempre conchiudendo, che non valga però lor la pena di trattarlo. Or trovandomi di già aver per quest' oggetto espressamente ragionato nella parte 2. delle seguenti *Considerazioni*, e dilucidati que' luoghi di Pappo, che per poca pratica nelle cose geometriche gli si rendevano inintelligibili. e però da essi male interpetrati, crederei abusar troppo della bontà del pubblico, ripetendo qui le cose stesse, che per altro a' bene istituiti sono ovvie. Solamente mi limiterò a far osservare, che anche il problema *d' iscrivere in un cerchio dato un poligono, sicchè i lati passassero per punti dati*, l' è più che determinato in molti casi, indeterminato in altri, come si è accennato a pag. x

della *dichiarazione*; e pure chi mai, tra' tanti sommi matematici che lo hanno trattato, ne ha per queste insussistenti ragioni rigettata la ricerca; le quali presso a poco toglierebbero a dirittura a' geometri il piacere di trattar problemi, ed a' contraddittori la pena di occuparsene, quando gli trovassero già prima da altri risoluti. Ed a chiunque di animo non prevenuto, e di scienza più regolare avrebbe fatto pur qualche peso, il trovare ripetutamente proposto lo stesso problema da distinti matematici, per lo spazio di più di venti anni, senza che mai alcuno pur per ombra si fosse al loro strano ripiego appellato.

CONSIDERAZIONI GENERALI

SU

TRE DIFFICILI PROBLEMI

E SUL

MODO DI RISOLVERLI

Lette alla R. A. delle Scienze di Napoli in agosto 1839.

PARTE I.

NATURA DELLE QUISTIONI PROPOSTE, E RAGIONI DI LORO SCELTA.

Altra volta, e sono già degli anni parecchi, presentai a quest' Accademia alcune mie considerazioni su' metodi in Matematiche, le quali miravano a stabilire il valor di questa voce troppo vagamente usata di presente, ed a dar di essi una più chiara idea per la maniera di adoperarli. Argomento è questo di somma importanza; poichè in esso l' invenzione, e tutta la scienza di coloro, che sanno usarne riposa; e quindi da ciò l' aumento delle Matematiche, opera di que' pochi, che al grado d' inventori possono con ragione aspirare, e delle Accademie cui questi soli, avuto riguardo allo scopo ed istituzione di esse, han dritto di appartenere. Che però non dovrà dispiacervi, miei dotti colleghi, se dopo lungo silenzio, io ripigli lo stesso argomento ora, che un programma di tre quistioni geometriche importanti, e difficili da me proposte a premio, me ne porge l'occasione.

Mirava tal mio programma a far dal fatto valutare l' energia o i difetti di ciascun metodo geometrico, o geometrico-analitico, per trarne consegnenza di doverli, chi vuol calcare con sicurezza le vie dell' invenzione, tutti apprezzare, convenevolmente usandoli; e far toccare con mano, che chi ignora la Geometria antica, e che non abbia ancor per questa parte dell' umano sapere obbedito al precetto Oraziano:

Vos exemplaria Graeca
Nocturna versate manu, versate diurna.

con la sola conoscenza de' metodi geometrico-analitici, per quanto genio abbia, e per quanto studio impieghi, non giugnerà mai ad ottenere la compiuta soluzione di un problema[1]. E se quel sublime e penetrante ingegno del Cartesio, nato fatto all' invenzione, per non aver coltivati gli antichi quanto conveniva, meritossi dal suo compatriota Fermat la giusta taccia di *essere ancor esso uomo nelle cose geometriche :* che dovrà poi dirsi di tutti coloro a' dì d' oggi, che in ingegno e penetrazione impari d' assai al Cartesio, osan disprezzare, perchè affatto non delibarono, que' puri fonti del greco geometrizzare, da' quali attignesi infinito sapere. E se l' immortal Newton, che i suoi stessi emuli tennero per una mente media tra gli angeli e gli uomini, dolevasi, essendo già vecchio, di non aver abbastanza studiato, e meditato su di Euclide e gli altri antichi geometri, con quella diligenza che dovevasi in autori di tanto merito, e fosse con troppa sollecitudine passato a Cartesio ed agli altri moderni: di quanto pentimento non dovrebbero esser compresi coloro, che Euclide e gli antichi mai non videro, o che nè men del Cartesio e degli altri, che il nuovo metodo geometrico-analitico coltivarono e promossero, tenner conto, limitando tutto il loro studio a qualche moderna istituzione; donde poi dalla poca scienza che ne raccoglie ciascun di costoro avverasi, che *professus grandia turget*; nè altro crede rimanergli ad apprendere. Senza lo studio degli antichi non si potrà mai riescire ad ottenere quella eleganza di soluzioni che ragionevolmente si richiede dagli accurati geometri, e che sì ben espresse l' Halley, dicendo : *Verum perpendendum est, aliud esse problema aliqualiter resolutum dare, quod modis variis ple-*

[1] La *compiuta soluzione di un problema* consiste in un' analisi diretta e chiara di esso; ed in una costruzione, che naturalmente da questa derivi, e che possa dimostrarsi risolvere il problema, invertendo il cammino dell' analisi.

rumque fieri potest, *aliud methodo elegantissima id ipsum efficere : Analysi brevissima*, *et simul perspicua*, *Synthesi concinna et minime operosa* [1]. E ciò sebben di passaggio, nè men sia qui notato a caso, essendo sì corrotto il gusto de' nostri giovani matematici, da valutare ad un modo stesso ogni soluzione, e talvolta creder da meno la più elegante, chiamandola puro esercizio di scuola; e di non curarsi affatto della costruzione : e ben di ragione per essi; poichè questa talvolta riescirebbe assai più difficile di una nuova soluzione, o al manco di una complicazione senza pari.

Or dovendo chi imprende a trattare un geometrico problema aver riguardo alla *determinazione* di esso, per assicurarsi al dir di Proclo, *quando quod quaeritur problema possibile sit, et quando impossibile* [2]; o anche, come più distintamente la specifica Pappo : *Determinatio est*, *quae declarat quando et qua ratione*, *et quot modis problema fieri possit*; all'*analisi* del medesimo, cioè alla *risoluzione*, ed alla *composizione*, che comprende insieme la *costruzione*, senza la quale un problema geometrico non può dirsi risoluto, nel che errano principalmente alcuni di coloro, che vi adoprano la moderna analisi, non facendo corrispondere la qualità del risultamento a quella de' dati; e finalmente alla *dimostrazione* : dovevan dunque quelle mie proposte mirare a siffatte quattro cose, per vedere come con ciascun metodo vi si riescisse; e perchè con uno potesse più facilmente ottenersi ciò, che con difficoltà conseguivasi con l' altro.

Da ciò potrete ora Voi stessi, miei colleghi, conoscere i motivi, perchè io preferii ad altre le tre quistioni che proposi. Con la prima delle quali dimandava di un famigerato problema analiticamente ri-

[1] Praef. in Apollonii Pergaei libros *de Sectione Rationis*.

[2] Lib. 2. *Comment. in primum Elem. Euclidis*.

soluto dal principe de' moderni analisti, il de la Grange, la geometrica costruzione, invano ricercata, e tentata invano per più di sessant' anni; e per confermare la deduzione esatta e regolare di essa dall' analisi da quel sommo uomo esibita, ne richiedea pur la corrispondente analitica dimostrazione. Addiceva il secondo premio ad un problema, che già conta da che fu la prima volta manifestamente proposto gli anni del presente secolo, senza che abbia ancor ricevuta una soddisfacente soluzione. Finalmente col terzo quesito proponeva un problema analogo, da non potersi risolvere senza la corrispondente *determinazione*, la quale valesse a stabilire le condizioni da rendere il problema possibile o impossibile; nè questa a me si apparteneva, altrimenti avrei ben data la soluzione che dimandava: il che per comprovare con l' autorità di tutt' i geometri, recherò il seguente luogo di Pappo: *Quaerentis enim officium est, et hoc determinare, et id quod fieri, et quod minime fieri potest; et si fieri potest, quando, et quomodo, et quotupliciter fieri possit.*

Ma pure enunciando un tal problema feci tanto da indicare, a chi per poco fosse nella Geometria usato, la necessità di tener conto della determinazione di esso; poichè sebbene analogo ne' dati e nel quesito al precedente, pure in questo dicevasi manifestamente essere il triangolo dato di *specie* e di *grandezza*, mentre nell' altro di esser *data* una piramide, cioè *proposta*, senza alcun' altra specificazione. E pure chi il crederebbe! per quella disusanza ne' metodi geometrici, di cui poc' anzi accennava, dopo parecchi giorni dalla pubblicazione del programma, leggevasi in un nostro giornale un avvertimento caritatevole fattovi inserire da alcuni nostri professori, di non occuparsi di tal problema, essendo *più che determinato*, *e quindi impossibile*; le quali due cose nè men potevansi insieme accoppiare, essendovi ben differenza tra *più che determinazione*, ed *impossibi-*

lità di un problema , nè questa essendo conseguenza di quella . E di tale superflua ed incongrua manifestazione nè pur contenti , ne hanno poscia fatto grandissimo rumore ; senza aver mai osato produrre alcuna ragione di tale loro sentenza .

E giacchè la presente circostanza dimostra richiederlo , ripeterò cose che a' bene istituiti sembreranno superflue .

Il problema è quella proposizione con la quale proponesi a ritrovare o costruire alcuna cosa ; al che ottenere esigonsi convenevoli dati , ed un corrispondente quesito . Or la convenevolezza de' dati , e del quesito l' è nel *numero* , e nella *proprietà* ; e quando ciò avviene , il problema si dice *determinato* pienamente . Che se vi sia deficienza nel numero de' dati , il problema si dirà *indeterminato* ; e sarà suscettivo d' infinite soluzioni , ciascuna delle quali corrisponderà ad uno stesso luogo geometrico , che abbia per proprietà il quesito del problema ; che però esso potrà facilmente trasformarsi in teorema . Se poi al contrario vi fosse eccedenza nel numero de' dati , supponendoli l' un dall' altro indipendenti , il problema si direbbe *più che determinato* : e da esso, volendolo risolvere , se ne potrebbero formare problemi diversi determinati , supprimendo or l' un dato superfluo , or l' altro .

Può esservi poi sconvenevolezza ne' dati , o nel quesito di un problema relativamente alla proprietà loro , quando vi sia tale affezione di essi che geometricamente ripugni ; e questa o assoluta , vale a dire da dover sempre aver luogo , o relativa , che abbia però luogo in alcuni casi ; nella prima circostanza il problema sarà *impossibile* ; nella seconda vi sarà bisogno di *determinazione*. E se nel primo caso l' impropriètà geometrica risulti manifestamente da una verità fondamentale di Geometria , il problema sarà mal proposto , e da non doversene affatto tentare lo snodamento : che se ciò non si avveri , l'analisi stessa del problema dovrà manifestarne l' impossibilità . Nel secondo caso

poi, cioè quando v' è bisogno di determinazione, dee colui che il risolve cercarla, e valendosene risolvere il problema; come dal surriferito luogo di Pappo chiaramente rilevasi.

Di problemi determinati se ne ha piena conoscenza dagli Elementi stessi di Euclide; e per gl' indeterminati può ancor da essi rilevarsi esempj, trasmutando in problemi alcuni di que' teoremi ne' quali la proprietà di qualche luogo geometrico si dimostra. Così dimandandosi di *costruire su di una data base un triangolo rettangolo*, o pur *che abbia un dato angolo verticale*, la prop. 32. El. III. nel primo caso, e la 21 nel secondo li dichiarerebbero indeterminati. Ed è ancor facile rilevar dagli Elementi stessi esempj di problemi più che determinati. Tal sarebbe, per un esempio, quello di: *costituire sopra una data base un triangolo di data aja, con un dato angolo verticale, ed avente i lati in data ragione*; perchè è chiaro, che due di tali dati sieno sufficienti alla piena determinazione di siffatto problema: che però, o possa richiedersi che il triangolo costituito sulla data base *avesse l' aja data, e dato l' angolo verticale*, o pure, che *avesse dato l' angolo verticale e la ragion de' lati*, o finalmente che *fosse data l' aja e la ragion de lati*.

E proseguendo sempre a trarre esempj dagli Elementi stessi, poichè di maggior chiarezza e facilità riescono; sarebbe *impossibile* il problema di: *iscrivere in un cerchio un romboide equiangolo ad un dato*; poichè dalla 34. El. I. rilevasi che gli angoli opposti di quel quadrilatero debbano esser tra loro uguali, e quindi nella somma maggiori, o minori di due retti; e dalla 22. El. III. si deduce, che essi dovrebbero pareggiar due retti, quando fosse il quadrilatero iscritto nel cerchio. Dell' altro caso poi d' impropietà relativa ne' dati, in cui si è detto abbisognarvi *determinazione*, ne offre un esempio Euclide nella 27. El. VI., alla quale appositamente premise la corrispon-

dente determinazione. E tal sarebbe per un altro esempio il problema di: *descrivere un cerchio per quattro punti : o di iscrivergli o circoscrivergli un quadrilatero simile ad un dato*. Ma sia per ora abbastanza detto su di ciò, che ancor superfluo a me pare, per dimostrare la genuinità del problema *della piramide* proposto nel programma : sebbene altro ancor mi rimanga a dire di positivo su tal proposito, che serbo alla parte II. del presente discorso, ove la storia di questo più che difficil problema dovrò esporvi.

Di simili casi abbondano tutte le opere degli antichi geometri, e le restituzioni di talune perdute di queste, principalmente quelle eseguite dal Simson [4], il quale stabilì ancora a tal proposito un' assai convenevole dottrina, che per chi l' ignora sarà bene quì ripetere : *Veteres duabus determinationibus utebantur, quarum altera ex altera sequitur, et quarum prima constructioni problematis necessaria est quae propterea compositioni semper praemittitur, altera vero quae compositionem sequitur, inservit ex iis, quae data sunt in problemate statim dignoscere, utrum construi possit vel non possit, quod quidem ex prima determinatione, vel duabus primis, si duae sint, ut in problematibus lib. II., quae determinationes habent, cognosci non potest, priusquam ad illam ultimam deducta fuerit prima aut alterutra ex primis si duae fuerint. In problematibus simplicioribus, hae prima scilicet et ultima in unicam determinationem saepius coalescunt* [5].

Or premesse queste generali considerazioni necessarie a distinguere la qualità de' problemi, e 'l modo da condurne la soluzione; a quale rubrica apparterrassi quello della piramide proposto nel programma?

---

[4] *Apollonii* Locorum Planorum *lib. II. restituti* – De Sectione Determinata *lib. II. restituti, et duobus aliis adjectis*.

[5] *Praef. in libros* de Sectione determinata.

Al che conoscere rifl. ttasi, esser nella piramide isoscele il problema sempre possibile ; e che siccome se quattro sfere vicendevolmente si tocchino, da' quattro piani tangenti esse a tre a tre può costituirsi una piramide determinata di specie e di grandezza, così potranno a questa iscriversi quelle quattro sfere nel modo richiesto nel problema : e potendo quelle quattro sfere tangenti variare di raggi, e di posizione ; si vede però bene, che infinite saranno le piramidi per le quali il proposto problema può risolversi. O pur volendo proseguire in altro modo siffatte geometriche indagini semplici e dirette, sulla natura del presente problema, avrebbesi potuto osservare, che toccandosi tre sfere date, se ad esse due a due intendansi circoscritti i coni tangenti, potrà un piano girar sempre intorno a due, toccandole, e toccando ad un tempo il cono rispettivo circoscritto, passando per un lato di questo ; che però se immaginisi una quarta sfera toccare le proposte, quel piano tangente indeterminato di sito, lo diverrà determinato toccando ancor questa quarta sfera ; e quindi da' tre piani tangenti le quattro sfere, in tal modo assegnati, risulterà una piramide con quel quarto piano che toccava esteriormente le tre sfere proposte. E di siffatte piramidi se ne otterrà infinite, facendo variare il solo raggio della quarta sfera, senza nè men concepire variabili le tre da prima stabilite. Il problema proposto non è dunque *più che determinato*, e molto meno *impossibile* ; ma dee risolversi aggiugnendovi la conveniente *determinazione*, sia che questa si voglia per le dirette vie geometriche assegnare, sia che debba ripetersi indirettamente dall' analisi algebrica, e per cammino assai più lungo e complicato. E non voglio tralasciare in questa circostanza di ripetere, ciò che si diceva ad altro proposito nel programma, che attualmente ognuno limita la scienza a quel tanto ch' egli vi sa vedere, senza prendersi affatto briga di leggere e riscontrare le opere, e le ricerche di uomini consumati in

essa ; che pure , sebbene nelle Matematiche l' autorità non valga , qualche cosa valgon però le considerazioni in casi simili . Che se coloro , chiunque si fossero , i quali francamente avventurarono la proposizione scritta nel giornale, si fossero imbattuti a leggere la memoria del Lexell sul problema del Cramer , o quella del nostro Annibale Giordano , o gli *Opuscoli della scuola del Fergola* , avrebbero da essi rilevato , che il Lexell nel cammino di sue ricerche su quel problema , giudicò indeterminato l' altro , ch' egli stesso proponeva , d' : *iscrivere in un cerchio dato un quadrilatero i cui lati opposti concorressero a punti dati* , e pur ne raccolse un' elegante proprietà di tali quadrilateri : che posteriormente il Giordano giudicò questo problema per più che determinato generalmente proposto , e per indeterminato con una special limitazione; nè però si ristette dal riguardare una tal quistione , come nel presente caso nostro , che di ben altro risultamento è fecondo , si è con troppa precipitanza erroneamente affermato . E che da queste loro dispari opinioni la Geometria ha guadagnato pur qualche cosa, nella convenevole spiega di tal paradosso geometrico , che vedesi ne' poc' anzi citati opuscoli .

Ma volendo ancora render ragione de' motivi che mi hanno indotto a preferire tre quistioni già antiche , e ripetutamente tentate , dirò in breve : I. di esser esse attissime allo scopo propostomi , e di facilitar grandemente il giudizio sulle soluzioni che se ne daranno , conoscendosene già abbastanza la difficoltà in trattarle , anche da chi non abbia profondo saper geometrico , e che dalla semplicità di una soluzione potrebbe talvolta giudicare erroneamente della facilità della ricerca fatta per riescirvi. Nè è la prima volta , che abbiamo avuto a dolerci di sì poco lodevole trattamento [a] . E poi chi non sa esser proprio del nostro

[a] Veggasi la *Conchiusione degli Editori* in fine de' primi tre *Opuscoli della scuola del Fergola* .

spirito il voler riescire in ciò precisamente, che da sommi uomini siesi per lungo tempo invano tentato. E senza dubbio, che per siffatte ragioni il Viviani, il Cartesio, il Fermat, il Vieta, il Ghetaldo, lo Snellio, il Newton, l'Halley, il Simson, il Fergola, il l'Huilier, lo Scorza, ed altri ancora tra' moderni geometri attesero, con grandissimo studio, più che in ogni altra cosa a restituirci ricerche perdute dell'antica Geometria, o nelle quali alcun di essi credè che quelli non fossero riesciti. II°. Che una nuova quistione ancora ignota nulla toglie alla scienza ed al valor de' metodi; ma ben gli offende quella che per lungo tempo si è ad essi dimostrata restìa; e conveniva però che una volta si restituisse a' metodi in Geometria quel potere ch'essi hanno di nulla ricusare a' geometri che sanno adoperarli. III°. Finalmente, come già indicai nel programma, essi eran tali, che compivano interamente argomenti a diverse riprese trattati in nostra scuola, e pubblicati fino al segno cui si era potuto giugnere, o negli *Opuscoli*, o anche negli Atti di cotest' Accademia.

Ma perchè tutto il fin qui detto il possiate più chiaramente rilevare, ed altri argomenti si aggiungano a comprovarne la scelta, eccomi a tesservi, per le quistioni proposte, brevemente la storia delle ricerche per esse fatte, e l'analisi di queste, da servir di base al giudizio, che dovrà, da' miei colleghi della classe matematica, pronunziarsi su quelle che sono state presentate. Dopo di che porgeranno ancora a me conveniente materia pel parallelo che dovrò istituire delle diverse soluzioni, e con diversi metodi date di que' problemi: donde mi sarà poi facile passare all' oggetto che per questi mi ho da principio proposto; e tentare, se fosse possibile, di far terminare pur una volta tante vane dispute, che pregiudicano a' progressi veri delle Matematiche, ed alla buona istituzione in esse.

PARTE II.

STORIA CRITICA DE' TRE PRECEDENTI PROBLEMI.

Il problema d': *iscrivere in un dato cerchio un triangolo, i cui lati passassero per tre punti dati*, fu nel 1742 proposto dall' insigne analista Cramer all' illustre geometra Castiglioni di Berlino [1]; ed al Cramer era stato, essendo giovane, proposto da altro vecchio geometra, ed egli lo aveva infruttuosamente tentato: ed il Castiglioni pensava, ch' esso fosse stato già precedentemente più volte riproposto, soggiugnendo: « *il semble, que le petit nombre des géomètres qui » le connoissoient, le gardoient pour embarasser les autres dans » les occasions* [2]. Sicchè a farla breve, da che esso comparve la prima volta in iscena finora, può ben contarsi per circa il secolo e mezzo. Nè più felice il Castiglioni in risolverlo, lo aveva già messo da banda, per attendere all' altro lavoro della *raccolta degli Opuscoli del Newton*, per la quale facevagli premure lo stesso Cramer, quando tredici anni dopo ricomparve lo stesso problema in Aia, a proposta di un anonimo; ed il Castiglioni essendone stato avvertito dal suo

[1] » Dans ma jeunesse, j'avais le gout que vous avez; un vieux géomètre, » pour essayer mes forces en ce genre, me proposa le probleme que je vous pro» pose: tentez de le resoudre, et vous verrez combien il est difficile «. Così scriveva il Cramer al Castiglioni.

[2] Vegg. l' introduzione alla memoria del Castiglioni inserita nel vol. degli Atti di Berlino per l' anno 1776. — Un tal problema era stato di nuovo conio inventato da alcuno, o pure desunto da Pappo, generalizzando il caso particolare che ne tratta nella prop. 117 lib. VII. delle sue *Collezioni Matematiche*.

amico M. Bouquet, raddoppiando gli sforzi, riescì finalmente, dopo lungo tempo, a risolverlo [9], prevalendosi di due lemmi dell' inesausta miniera delle *Collezioni Matematiche* di Pappo: ed egli presentò la sua soluzione all'Accademia di Berlino. L'illustre de la Grange, che teneva allora un posto distinto in quest' Accademia, non isdegnò di farne l'oggetto di sue analitiche ricerche [10], prevalendosi di un noto principio trigonometrico, e di un altro che come nuovo il Castiglioni imprese a dimostrare, derivandolo da due lemmi geometrici; nel mentre esso è una facil conseguenza di noti principj elementari di Trigonometria [11]. Egli però mirabilmente usando di sua scienza, appena potè giugnere all'equazione per tal problema, non senza involgere in forma più breve alcune espressioni, che siffatta equazione implicano, e che assai greve ne rendono lo sviluppo; ed ivi arrestossi, non compiendone però la soluzione. Il che considerando il sommo Eulero, non si rattenne dal dire: *se dubitare utrum solutio analytica illustris de la Grange ad aliquam expeditam et concinnam constructionem geometricam perducat* [12]. E però imprese a darne un altra soluzione, alla quale premise quella del problema recato da Pappo, col qual titolo presentò la sua Memoria, che vedesi ne' *Commentarj nuovi di Pietroburgo* per l'anno 1780. Ma quanta

---

[9] Il Castiglioni, dopo che gli pervenne notizia della proposta dell'anonimo di Aia, presentò la sua soluzione all'Accademia nel 1776, cioè dopo 34 anni da che aveva cominciato ad occuparsene.

[10] Il de la Grange ne inviò la soluzione al Castiglioni l'indimani che costui lesse la sua all'Accademia.

[11] Vegg. l'*Opuscolo II. della Raccolta della Scuola del Fergola*, e la mia Trigonometria.

[12] Veg. la memoria di Lexell nel volume de' *Commentarj nuovi di Pietroburgo* per l'anno 1780.

portanza si ponesse a quel tempo in risolvere un tal problema potrà rilevarsi dal vedere, che contemporaneamente all' Eulero il suo discepolo Nicola Fuss, seguendo sulle orme del suo maestro un metodo misto, ne esibì altra soluzione ; e che il di lui condiscepolo Lexell faceva i più grandi sforzi per costruire l' equazione ottenuta dal de la Grange, senza avervi potuto compiutamente riescire . E siffatti due lavori su di uno stesso problema meritaron luogo nel volume de' *Comentarj* poc' anzi citato , in seguito di quello di Eulero : sicchè una sì cospicua Accademia non istimò indecorso di tanto occuparsi in questa sola geometrica ricerca . E potrà anche conoscersi , che , nel breve intervallo di quattro anni, due Accademie delle principali di Europa avessero a gara trattato uno stesso problema , in cui si erano adoperati cinque de' più illustri geometri ed analisti, tra' quali niente meno che l' Eulero , ed il de la Grange . Dopo questi lavori di sommi matematici , un illustre geometra ed analista di Ginevra (Simone Lhuilier), che tenendo allora la cattedra un tempo occupata dal Cramer , riputavasi come di dritto chiamato ad occuparsi ancor egli di tal problema , intraprese ad estenderlo al poligono , e dubitando quasi della possibilità per una soluzione geometrica , come avrebbe desiderato , si risolvè a trattarlo algebricamente : partendo dunque dagli stessi principj del de la Grange , pervenne a risultamenti analoghi , e del pari imperfetti [13]. Ma egli fece anche di più , mostrando una via da poter passare dalla soluzione del problema pel cerchio a quella per le curve coniche in generale , la quale quantunque non rigorosamente geometrica, pure l' era degna di considerazione, come il primo passo che davasi per universalizzare quel problema ; ed inoltre lo estendeva ancora alla sfera , del che aveva qual che cosa accennato oscuramente l' Eulero , ed ancora ad altri so-

---

[13] *Mémoires de l' Académie de Berlin an. 1796.*

lidi di rivoluzione , come agli ellissoidi , paraboloidi , ed iperboloidi . E già prima di esso il sig. Giordano allievo del Fergola , in età di soli 14 anni, sotto la direzione di maestro sì eccellente , aveva risoluto con grandissima facilità ed eleganza, usando il metodo geometrico antico, il problema del Cramer , e ne aveva estesa la soluzione al poligono : il che , sia detto di passaggio , non poteva ottenersi che dal solo metodo geometrico da lui adoperato ; che certamente nessuno oserà estendere sì facilmente una soluzione geometrico-algebrica dal caso particolare al generalissimo . Ed è degno di particolare avvertenza , che costui al contrario del Lhuilier si dimostrava desideroso di veder questo problema pel poligono algebricamente risoluto [14] . E fu di tanto merito la soluzione del Giordano , che il Lorgna fecela inserire nel vol. IV. delle *Memorie della Società Italiana* ; e che il celebre professor Malfatti non isdegnò , ripigliando gli stessi principj , di compierne altra soluzione , che fu nel volume stesso inserita . E dopo tutt' i già detti , anche il Carnot , che onorò di molta lode la soluzione del giovine napoletano, trattò lo stesso problema nella sua *Géométrie de position* ; e più appresso ritornava il Lhuilier , nella sua dotta opera dell'*Analyse géométrique, et algébrique* , ad occuparsene , esibendone una soluzione geometrica, che desunse da quelle del Giordano e del Malfatti con qualche modificazione , ed un' altra algebrica , che traeva da quella del de la Grange, e da lui estesa ; e s' introduceva a queste dicendo » L'application générale de la méthode des coordonnées aux problèmes précédens me paroit conduire à des expressions trop compliquées , soit » dans la recherche , soit dans les resultats , pour qu' il me paroisse » convenable de suivre ce procédé . Le procédé de la Grange me pa-

[14] Si riscontri la nota e al programma.

roit le plus simple, et c'est celui que je vais exposer[15] «. Nè dopo ciò si rimasero i geometri e gli analisti dal considerare sì specioso problema. Ed è opportuna cosa di qui notare, che ritornato esso di nuovo in nostra scuola, ricevè per mano del prof. Scorza una generale elegantissima soluzione, facendola dipendere da un nuovo principio geometrico dimostrato da Roberto Simson, che riputollo un *porisma* Euclideo; e che egli il primo vi fece anche rilevare il caso in cui quel problema rimanevasi indeterminato, compiendo e perfezionando la soluzione di esso alla maniera greca, con la conveniente *determinazione*, ed aggiunse altre ricerche analoghe al problema stesso.

Dopo tanta luce sparsa dalla Geometria antica su di un problema sì difficile, mancavane tuttavia una soluzione compiuta fatta con l'analisi moderna, non potendo tenersi alcun conto di quella lasciata imperfetta dal La-Grange, come si è già detto: sicchè questa vedevasi costretta non pure a dover cedere il passo all' antica, che sì bene, ed in più modi se n'era finalmente impossessata; ma a tacersi assolutamente innanzi ad essa. Ed a toglierle quest' onta impegnossi con tutta la sua arte il più grande olimpionico della moderna Geometria analitica, che sapeva ben a proposito adoperarla, ed isfuggire i difetti, che non tralasciava però di riconoscervi, e confessarli, il sig. Gergonne, dando ne'suoi *Annales des Mathématiques* (v. VII. an. 1816) una soluzione algebrica pura di questo problema esteso alle curve coniche, e corredandola della corrispondente costruzione; facendo ogni sforzo per dimostrar questa connessa con l' analisi del problema, e da essa dedotta[16]. E posteriormente una quasi identica soluzione ne fu pubblicata (nel 1818) da un nostro professore: ma in questa af-

---

[15] *Elemens d'analyse géométrique, et d'analyse algébrique* §§. *146, 147, 148.*

[16] Vegg. la *parte* III. n. 1. delle presenti *Considerazioni*.

fatta non si ravvisa la connessione tra l' analisi e la costruzione ch' ei ne reca, la quale potrebbe far ben sospettare, che gli fosse stata già *conosciuta*, preventivamente all'analisi; e per tale di fatti egli l'annunzia. Ma del merito della soluzione del Gergonne mi serbo a trattare nel parallelo di cui ho più volte detto, che dovrò istituire tra le diverse soluzioni di questo difficile ed importante problema. Per ora mi basterà accennare, esser tale al paragone l' analisi data dal La-Grange, che per ogni nuovo sforzo che si faceva per analiticamente risolvere quel problema, sempre più desideravasi che quella si riescisse a costruire. Al che adoperatosi validamente il mio antico allievo Nicola Trudi, di cui potrebbesi ripetere ciò che ben dicea Giov. Bernoulli di Eulero, *felicissimi ingenii juvenis, a cujus sagacitate et acumine maxima quaeque nobis pollicemur, postquam vidimus quanta facilitate et solertia in adyta sublimioris Geometriae nostro auspicio penetravit*; ed essendo stati gli sforzi di esso coronati da felicissimo successo, mi venne subito in pensiero di accogliere questa circostanza per l'oggetto indicato di sopra, e costituirne un premio pel programma a proporre. Mi lusingava ed ancor mi seduce la speranza, che commossi per tal modo gl'ingegni feraci de'nostri geometri, principalmente de'giovani coltivatori de'moderni metodi, qualche cosa di buono fosse riescito ancora ottenere. Ad ogni modo avremo sempre guadagnato, che l'analisi moderna non mancherà di essere ancor essa concorsa alla soluzione di quest' importante problema, al qual grado non avevano nè meno potuto portarla gli sforzi del suo corifeo La-Grange, e del sommo Eulero, non che de'costui valentissimi discepoli Fuss, e Lexell, e forse di tanti altri analisti, che quando gli animi eran caldi e ferventi di tal ricerca, se ne dovettero occupare. Ed inoltre vedrassi, che quando sappiasi convenevolmente procedere, si possa com'è di ragione, ordire ad un analitica soluzione la corrispondente costruzione

della qual cosa mai alcuno ha potuto pur per ombra dubitare; se non che questa per la complicazione dell'equazione al problema può riescire alcuna volta tale, da divenire opera più difficile della stessa soluzione, e quindi obliterarla, come l'era nel caso presente della soluzione del La-Grange; o pur che assai inelegante essa risulti. E come che ogni dottrina che non sia in libri di moderne istituzioni, è per taluni nostri presenti matematici un arcano, gioverà qui ricordare quello che notò il Simson, nella prefazione alla sua bellissima restituzione de' *Luoghi Piani* di Apollonio, ripetendolo con le sue stesse parole; che gran precetto in ciò si contiene pe' coltivatori de' modernissimi metodi algebrico-geometrici: *Praeterea, ex rite instituta problematis, vel Loci alicujus, analysi geometrica, compositio haud difficulter, plerumque sponte fluit. Contra autem, postquam locus ad aequationem deductus est; plus negotii et ingenii ad ejus compositionem, ope Canonis generalis, perficiendam, ad aequationis inventionem saepe requiritur. Et hoc quidem multis exemplis ex marchione de l' Hopital, aliisque scriptoribus ostendi facile posset quorum unum adducere satis erit. Canones* $y = c + \frac{bx}{a}$, $y = c - \frac{bx}{a}$ *duo sunt ex iis, quos tradunt auctores pro constructione locorum ad rectam lineam. Videamus igitur quomodo his utantur in constructione loci alicujus, ex. gr. ejus qui habetur in prop. 11. lib. I, de Locis Planis Apollonii a Schootenio restitutis (pag. 246), qui locus, ut a Schootenio resolvitur, ad sequentem aequationem deducitur, viz.,*

$$y = \frac{cdio + efko + ghlo + abnx + cdox - efox - ghox}{mz^2 + bnz - doz - foz + hoz}.$$

Tum jubet Schootenius, brevitatis causa, p scribi pro .....

$\frac{cdio + efko + ghlo}{mz^2 + bnz - doz - foz + hoz}$, *et* $\frac{q}{r}$ *loco ipsorum* . . . . . .
$\frac{abn + cdo - efo - gho}{mz^2 + bnz - doz - foz + hoz}$: *quibus substitutis habebitur* . . .
$y = p \pm \frac{q}{r} x$. *Et quoniam aequatio haec , datis p , q et r facile construi potest , putat se satisfecisse aequationis propositae constructioni ; aliud enim nihil, praeter haec quae dicta sunt , pro compositione, hoc est constructione et demonstratione loci propositi affert Schootenius . Atque sic qui viam hanc sequuntur , sibi et in Geometria tyronibus illudunt . Sed praeterquam quod aequatio haec , eique similes* ἀγεωμετρικαὶ *prorsus sunt , quis non videt multo difficilius fore invenire ipsas p , q , r geometrice , ut earum ope aequatio construatur , quam aequationem ipsam invenire* . . . . Mi astengo per brevità dal continuare questa bellissima dottrina del Simson , e di farne l'applicazione a' tanti casi di soluzioni , e costruzioni con la moderna Geometria analitica , lasciando ciò considerare a coloro stessi che ne usano.

Ritornando dunque al lavoro del Trudi , dirò , che dopo di aver egli adempiuto al primo quesito secondo il programma, non mancherà di presentare per mio mezzo a questa R. A. tre altre soluzioni dello stesso problema , la prima geometrica co' principj stessi del La-Grange , l' altra ancor geometrica pel problema esteso alle curve coniche ed al poligono ; e la terza per questo stesso problema con l' analisi Cartesiana . Sicchè dopo tutto questo lavoro , se non altro vanto potesse darsi la nostra scuola , nessuno potrà certamente toglierle quello di avere in modo geometrico ed analitico risoluto compiutamente in varie guise un problema, che ha tenuti per lunghissimo tempo, e non con felice successo occupati i mag-

giori geometri ed analisti moderni. Ma io vi soggiungo, che da tutte queste ricerche geometrico-analitiche fatte dal Trudi, l' analisi algebrica avrà conseguito un nuovo metodo, da costruire con eleganza i risultamenti de' problemi geometrici con essa risoluti: e da ciò la medesima, dopo la costruzione Cartesiana, un altro gran passo avrà dato per avvicinarsi al puro, e chiaro metodo geometrico degli antichi. Dal che potrà dedursi, che il lavorare sopra problemi geometrici, non sia un lusso della scienza, ed un esercizio superfluo, come taluni per poca conoscenza credono, potendo in mano di coloro, che son pratici ne' metodi, e sanno adoperarli a proposito, divenire occasione di nuove scoperte, e prolungamento di quelli. Al che certamente mirando col suo acuto ingegno Gio. Bernoulli pronunziò quella sentenza, da me per tal ragione scelta ad epigrafe del programma, che: *Proponere problemata in publicum non caret utilitate; hac enim ratione excitantur et acuuntur ingenia, ac saepe aliquid eruitur in scientiae incrementum, quod alioquin forte absconditum mansisset*. Ed in fatti, per non ripeter tante cose, chi non sa, che dal problema *isaperimetrico* abbia avuto origine il *calcolo delle Variazioni*, che forma l' apice de' metodi sull' infinito matematico, con tanto successo promossi ed adoperati da' moderni; e che la Geometria analitica debba pure, per opera del sommo La-Grange, a' problemi sulla piramide triangolare, come più volte ho detto, il modernissimo metodo analitico puro nelle ricerche geometriche; il quale più utile gli si renderà, quando potransi stabilire regole generali, e certe da liberarlo da que' difetti, che ancor si ravvisano nel procedimento di esso. Ma di ciò sia detto abbastanza per ora. Non debbo però tralasciare, perchè tutto sia messo innanzi gli occhi de' miei colleghi di quanto riguarda la storia di questo celebratissimo problema, ed a sempre più comprovare l' importanza, e la difficoltà di esso a trat-

tarlo con la moderna analisi, che il sig. de Poncelet, in una sua dissertazione *sull' uso dell' analisi algebrica nella Geometria* diretta come a disfida al Gergonne, volendo produrre qualche ricerca difficile, ch'egli chiama *prova di fatto* in quest' argomento, propone precisamente il problema del Cramer generalizzato, ed esteso alle curve coniche, e ne esibisce una sua costruzione, tacendo l' analisi che ve lo aveva condotto, che mai più, per quel che sia a mia notizia, si vide comparire. E fu da ciò indotto il Gergonne a quella soluzione sua di cui più sopra abbiamo ragionato [17].

---

[17] E degno di particolare attenzione il seguente squarcio della risposta del Gergonne al Poncelet, sul proposito di cui sopra abbiam detto, che originalmente riporteremo ad istruzione de' nostri giovani matematici « J' ai dit, et je » répéte encore aujourd' hui, qu' on n' a pas su tirer jusqu'ici de la Géométrie » analytique tout le parti qu' elle semble susceptible d' offrir ; qu' on la colomnie » losqu' on la regarde comme peu propre à fournir pour les problémes de Géomé- » trie des constructions simples et élégantes, que la faute parait en être pres- » que uniquement dù à la maniere dont on l' a employée ; et qu' en la maniant avec » plus d' adresse on peut en deduire des constructions qui, *si elles ne sont pas su- » périeures à celles de l' ancienne Géométrie, paroissent du moins ne devoir leur rien » céder en simplicité, et en élégance* « (del che noi altrove istituiremo parallelo). » J' appuyai ces assertions par quelques exemples ; et je demanderai a M. Ponce- » let lui-même, s' il connoit, en particulier pour les problèmes de Viete et de » Fermat quelques constructions plus directes, plus générales, plus élégantes, et » plus simples que celles auxquelles on est directement conduit par la Géométrie » analytique employée de la maniere que je concois «. Ed egli altrove si doleva con ragione di vedersi le soluzioni del Vieta, e del Fermat pe' problemi delle *Tazioni*, e de' *contatti sferici* ridotte sempre da un problema più difficile ad altro di già risoluto : e sembra a tal proposito che ignorasse, che per quelli della prima famiglia un tal difetto non era nelle soluzioni perdute di Apollonio. Nè io pur per ombra mi dolgo, che il Gergonne, quantunque compilatore degli *Annali* di una scienza, il che l' obbligava a cercar di conoscere quanto d' importante in s-

L'altra delle quistioni da me proposte al premio, per chi la risolvesse analogamente alla dimanda fattane, conta, come diceva, già gli anni del corrente secolo, senza avere ancor ricevuta quella soluzione che ad essa conviene, e che i geometri ragionevolmente dimandano: ed un caso particolare di essa aveva già precedentemente formata parte del problema *trigemello* risoluto da Giacomo Bernoulli; nè so capire come mai quest' uomo sommo avesse potuto tralasciare di generalizzarlo, o che per tanti anni altri non avesse ciò avvertito. Finalmente apparve essa, come problema di riduzione di quello di: *Dato un prisma retto*

---

sa pubblicavasi, non avesse avuta notizia delle soluzioni elegantissime del Fergola pe' contatti circolari, e delle mie per gli sferici, in cui ciascun de' problemi di queste due famiglie è indipendentemente, nella sua generalità, e con assai più eleganza che da lui risoluto: lo stesso per la soluzione del principale de' problemi delle *Tazioni*, fatta dal professore Scorza, e che da me presentata a questa nostra Accademia vedesi inserita nel vol. I. de' suoi Atti. E piuttosto di tale omissione degli *analisti* ne do a noi medesimi la colpa, che per sistema abbiamo cercato di acquistarci merito con la scienza, e non col diventare noi medesimi i divulgatori di quel poco di buono, che ci hanno permesso le nostre forze, e meschini detrattori delle altrui cose, come da qualche tempo a questa parte par che se ne sia introdotto il poco onesto spregevol costume qui tra noi. Conchiude finalmente il Gergonne dicendo: » Loin donc que je » croie que l' on doive négliger la Géométrie pure pour l' analyse; je pense, au » contraire, avec M. Poncelet, qu' on ne saurait trop s' appliquer à les cultiver » l' un et l' autre avec un soin égal; mais je pense aussi que s' il peut être souvent » utile de s' aider dans l' analyse des considerations que la Géométrie peut four» nir, et *vice-versa*; on n' en doit pas moins apporter tous ses soins à tirer de cha» cune de ces deux branches d' une même science tout le parti que, sans le se» cours de l' autre, elle peut être susceptible d' offrir «. Ed io mi lusingo, che i nostri giovani matematici, a' quali tante volte abbiamo noi ripetuto un sì vantaggioso consiglio, vogliano esserci grati in sentirlo pronunziato da uno de' maggiori promulgatori dell' analisi pura nelle ricerche geometriche.

triangolare, *cavare da esso tre cilindri eguali al primo*, *e della massima solidità*, proposto al Malfatti, e da costui trattato in una memoria della *Società Italiana* per l' anno 1803 [1]. E per cominciar da ora a valutare di qual tempera esso sia, l' illustre matematico, che ne tentò la soluzione, prevenne i suoi lettori col dire: » Vi sono in » Geometria alcuni problemi, la soluzione analitica de' quali non si » può presentare senza tedio del lettore, attesa la lunghezza e l'improbità de' calcoli a' quali ha dovuto soggiacere il geometra nella soluzione del suo problema, laddove dopo aver conosciuto il vero » risultato, convertendo l'analisi in sintesi simbolica, ed il problema » in teorema, succede parecchie volte, che si possa per una via più agevole e piana dare di esso una comoda dimostrazione. Di questa specie è l' enunciato problema, che mi fu proposto non ha guari, e che » mi parve sul principio di facile soluzione, osservando ch' esso riducevasi alla iscrizione di tre circoli ne' due triangoli delle basi parallele del prisma, così che ciascun de' circoli toccasse gli altri due, » ed insiem due lati del triangolo. Intrapresa per tanto la soluzione di » questo secondo problema, mi vidi contro ogni mia aspettazione ingolfato in prolissi calcoli, e scabrose formole atte a stancar la pazienza di un uomo meno di me ostinato. Superata però la difficoltà, ed » avuti de' risultati assai semplici, tentai cangiando il problema in teorema, aprirmi una via più comoda per la dimostrazione «. Dal quale ragionamento del Malfatti altro non può conchiudersi, che la gran difficoltà, e gli stenti da esso provati nel risolvere il problema di riduzione, che costituisce il nostro assunto. Poichè riguardo alla trasformaziona vantaggiosa, ch' egli accenna, dell' analisi algebrico-geometrica, o di parte di essa in un teorema, proponendola ad espediente

[1] Per la soluzione del Malfatti veg. la *parte* III.

generale in casi simili, ciò non toglie, che possa giustamente richiedergli si, qual sia stato il mezzo che lo abbia condotto a quel teorema ; e che quindi egli ricada nella stessa analisi , e nelle calcolazioni assai prolisse durate per essa, e che egli voleva evitare [19] .

Questo lavoro del Malfatti , per non mostrare in fronte scritto il titolo della quistione cui riguardava , era sfuggito agli *annalisti delle Matematiche di Lione* : nè ciò può loro imputarsi a colpa; poichè chi mai potrà oggigiorno compromettersi di conoscere tutto quanto pubblicasi in tal ramo , per materie nelle quali non basta percorrerle leggendo , ma bisogna considerare e sviluppare . I progressi delle Matematiche potranno solo ottenersi dalla lettura de' classici autori , da' quali , oltre la scienza che vi si apprende , traggonsi i semi a farla progredire , e dopo ciò meditando ; non già , come ora costumasi , infarcendosi la mente di titoli di libri , e d' indici d' istituzioni , o percorrendo giornali superficiali , per figurar con parole , e nulla operando . Nè tampoco avendo avvertito alla memoria del Malfatti quel geometra che agli annalisti suddetti il propose, per pubblicarlo nel loro dotto giornale , costoro non mancarono di annunziarlo come nuovo , e di occuparsene ancor essi : donde furono indotti, dopo qualche tempo, a dichiarare ciò che quì giova originalmente riportare : » Sono più » di dieci anni che questo difficile problema si è presentato per la pri» ma volta a' compilatori di questa raccolta ; i quali sebbene lo aves-

---

[19] Al nostro sentimento è uniforme quello di tutti i matematici che se ne sono posteriormente occupati : e noi riporteremo al proposito la seguente *Nota de' compilatori degli Annali* »Malheureusement cette solution est peu propre à eclairer » sur les moyens par les quels l'auteur l' a obtenue ; elle se réduit uniquement en » effet à former les équations du problême et les valeurs des inconnues , et a » prouver ensuite , a l' aide des relations entre les données , que les dernieres » satisfont aux premieres .

» sero attaccato a diverse riprese, non poterono per lungo tempo per-
» venire a risolverlo, *e nè anche ad assicurarsi se esso era ri-*
» *solvibile col cerchio e con la riga* (cioè del grado di tal proble-
» ma): per cui non avrebbero pensato a proporlo negli *Annali*, se
» non vi fossero stati spinti da un loro associato.

» Credevano essi ragionevolmente, che il geometra il quale li
» aveva indotti a far rivolgere l' attenzione de' loro lettori su questo
» problema, s' incaricherebbe egli di risolverlo: ma avendo lungo
» tempo vanamente aspettato, stimarono dover fare ancor nuovi ten-
» tativi, e si credettero più fortunati questa volta che le precedenti in
» esser pervenuti, *se non a trovare una costruzione del problema*,
» *almeno ad abbassarlo al primo grado* [10], *ed a ridurre la sua*
» *soluzione ad un calcolo aritmetico assai semplice*«. La qual conchiusione basta a mostrare, perchè delle loro ricerche non siesi tenuto affatto conto da' geometri, che posteriormente hanno trattato lo stesso problema, tenendolo per nuovo, e non ancora risoluto come convenivasi alla natura e qualità di esso. Il problema è geometrico, e però a risolverlo nulla vale il calcolo numerico, ma si richiede una costruzione: e ricorderò a questo proposito ciò che diceva l' Eulero in occasione della soluzione del de la Grange pel problema del Cramer: *Verum quia problema est geometricum, non tam calculus numericus, quam constructio geometrica desiderari solet*. Nè poi sì semplice può dirsi l' analisi che vi ordirono, essendo anzi assai onusta di principj geometrici involti nelle formole che vi adoprano, e di analitiche combinazioni e riduzioni, che di molti dati per conseguenza, su-

---

[10] Questa espressione è assolutamente erronea: il problema non può abbassarsi di grado cambiando natura. E noi faremo notare in appresso ciò che conviensi a tal proposito.

perflui ad una genuina soluzione, la rendono grave. Ma non è questo il luogo da entrare in più particolari per tal soluzione, sulla quale riverremo in appresso.

Posteriormente avendo essi ricevuta dal sig. Bidone, matematico di Torino, la notizia della soluzione del Malfatti, e la costruzione alla quale questa lo aveva condotto, nel vol. II° de' loro *Annali* così soggiugnevano: » In luogo di verificare i valori delle incognite sulle e-» quazioni del sig. Malfatti, i compilatori degli annali preferiscono » verificarli sulle loro, che sono più semplici, attesochè il sig. Mal-» fatti impiega sei incognite invece di tre, e che inoltre non avendo » rappresentate per simboli particolari le distanze de' vertici del tri-» angolo dato dal centro del cerchio iscritto, le sue formole risul-» tano complicate di radicali ". « Dopo ciò gli stessi annalisti a pagina 165 del medesimo volume ripigliano quest' argomento, riportando una lettera ad essi diretta dal sig. Thedenat corrispondente della 1ª. classe dell' Istituto, e rettore dell' accademia di Nimes, della quale non è fuor di proposito recar quì il cominciamento. » *Signore* — » Il silenzio del sig. Bidone, o piuttosto quello di Malfatti, stesso sul-» la natura delle considerazioni, che hanno potuto condurlo all' ele-» gante risultamento, che ci avete fatto conoscere a *pag.* 347[*], 348 » *Ann. vol.* I., mi ha condotto ad alcune ricerche su questo curio-» so problema. In verità la soluzione n' è ora conosciuta, e voi a-» vete provato, *a pag.* 60 *vol.* II., ch' essa è esatta. Ma non sa-» pendo per qual via vi si perviene, questa soluzione non può esser » considerata, che come un teorema, del quale si può ragionevol-» mente desiderare una dimostrazione semplice come la sua enuncia-» zione «. Egli continua dopo ciò le sue considerazioni sulla soluzio-

---

[*] Si vegga su questo proposito la *parte* III.

ne del Malfatti; e dopo lungo calcolo ne deduce quel teorema, mentre senza affatto stento, anzi senza calcolo veruno poteva ravvisarlo immediatamente dalla soluzione del Malfatti, come farò rilevare nella Parte III.

Si fa cenno di nuovo di tal problema dal Gergonne nel vol. VII., all' occasione della risposta al Poncelet, di cui più sopra fu fatta menzione, dicendovi: » Si dee osservare al più, che vi sono alcuni pro- » blemi, che sembrano mostrarsi egualmente riluttanti a tutt' i metodi, come per esempio quelli dell'*iscrizione di tre cerchi nel tri-* » *angolo; e di quattro sfere nel tetraedo* ». Ed altra volta esso comparisce nel vol. X. degli *Annali* (*an.* 1820), ove sono recate le ricerche sul medesimo del prof. Lechmütz di Berlino, dirette a' compilatori con la seguente lettera.

Berlino il 23 gennajo 1820 — Signore — Dando nella vo- » stra stimabile raccolta l' istoria del curioso problema, del quale » avrò l' onore di trattenervi, facendo conoscere la soluzione sempli- » cissima che n' è stata data da un celebre geometra italiano, ave- » te mostrato il dispiacere, che si dovesse giustificare a posteriori la » formola finale del Malfatti, provando ch' essa soddisfi alle equa- » zioni, che si tratta risolvere, senza che si osservi come per mez- » zo di queste sole equazioni si potrebbe pervenire a questa stessa » formola, se essa fosse incognita, o almeno ad ogni altra equiva- » lente, di facile costruzione. Queste considerazioni avendomi de- » terminato a ritornare di nuovo e recentemente su questo singola- » re problema, sono stato molto felice di ottenere una soluzione, » la cui semplicità ed eleganza vi farà forse giudicare esser tale da » comparire nella vostra raccolta, e che in conseguenza passo ad espor » brevemente, pervenendo alla stessa costruzione del Malfatti; in- » dicando anche come conoscere e distinguere i casi del problema ».

Ma questa soluzione del Lechmütz fatta con l' analisi Cartesiana , non è effettivamente che la miglior dimostrazione del risultamento del Malfatti ; di che l' autore medesimo conviene.

Dopo ben sette anni si vide , negli stessi *Annali* , comparire un estratto di una memoria del sig. Steiner , impressa nel celebre e dotto giornale di Matematiche , il quale pubblicasi in Berlino , dal valentissimo matematico , segretario di quell' Accademia sig. Crelle, della cui corrispondenza mi tengo onoratissimo ; nel quale lo Steiner , dopo aver parlato della gran difficoltà del problema di Malfatti , e dell' altro analogo della piramide , passa a generalizzarli , asserendo aver date di entrambi le corrispondenti soluzioni, delle quali nulla possiamo dire , non essendoci pervenuta altra notizia , che quella assai imperfetta , che nel citato luogo degli *Annali* si legge. E da questi rileviamo pure , che lo Steiner proponevasi di pubblicare su tale argomento un' opera espressamente.

Tante ricerche fatte su questo problema da valentissimi analisti , e per tanto tempo , facevano però ancora desiderare di esso una convenevole e diretta soluzione geometrica; al che impegnatosi il sig. Paucker , geometra ascritto all' imperiale accademia di Pietroburgo, riescì a risolverlo , dandone una costruzione elegante , alla quale però non perviensi , *senza aver prima percorsi nove lemmi* , che sono tante nuove speciose verità su i contatti circolari , le quali secondo l' ordine da lui tenuto , costituiscono l' orditura della ben lunga analisi del problema ; e di ben altri undici ne fa bisogno per la corrispondente dimostrazione ; dal che deducesi eziandio , non esser essa nell' ordinario modo dall' analisi derivata : e l' accademia accolse tal lavoro pe' suoi Atti , nel volume per l' anno 1832 [12]. Pervenutomi questo a caso nelle mani , giacchè le nostre biblioteche e le accademie , per nulla pen-

[12] L' orditura di questa soluzione sarà riportata nella parte III.

sano a provedere questi principalissimi libri necessarj al loro scopo, mi posi subito a percorrere una tal soluzione, che oltre la novità, m' interessava, come ho già detto nel programma, per compiere l' argomento delle *Tazioni*, in nuova ed assai elegante maniera trattato dal Fergola, e perfezionare affatto questa parte del *Luogo di risoluzione* delle greche scuole. Ma ad ogni passo arrestavami la complicazione delle figure, anche per la debilitazione de' miei occhi, che non mi lasciava veder bene le linee ed i punti che indicavansi. Messo quindi da banda il libro, mi rivolsi a tentar da me la soluzione: dal che mi avvidi della sua grandissima difficoltà; ond' è che deviato da altre occupazioni, la rimisi ad altro tempo. Intanto avendo di questo problema, e della somma difficoltà da me incontrata in risolverlo ragionato col sig. Trudi, di cui più sopra ho detto, costui, dopo breve tempo, ed in mezzo ad occupazioni, che il deviano pur troppo della scienza per la quale è fatto, mostrommi una sua elegante soluzione di problema sì difficile *[3]. E già mi preparava a pubblicarla, quando, conoscendo la natura e qualità del problema, mi venne il pensiero di poter con esso, e con l'altro di cui quì innanzi vi ho ragionato, formar un programma da accrescere stimolo a' nostri matematici, per occuparsi di questo problema, con quel metodo, che avessero creduto migliore in trattarlo; specialmente desiderando conoscere cosa valessero gli sforzi de' nostri valorosi atleti del metodo analitico puro, per sempre più accrescere

*[3] Posteriormente lo stesso Trudi ha risoluto l' altro problema assai più difficile d': *iscrivere in un triangolo dato di specie e di grandezza tre ellissi simili e similmente poste od una data, le quali si tocchino tra loro, e tocchi ciascuna due lati del triangolo*. Ed io per sempre più spingere i nostri coltivatori della moderna analisi pura ne' problemi geometrici, gli invito a tentarlo con essa convenevolmente, prima che sia pubblicata la soluzione del Trudi, come avverrà, dopo che l' Accademia nostra avrà pronunziato il suo avviso sulla soluzione del primo di tali problemi.

materia da istituire parallelo tra' diversi metodi d' inventare in Geometria , e della più propria maniera di usarne . E mandato ciò ad effetto, non senza il vostro ajuto , che gentilmente mi avete accordato , di rivedere le risposte , che se ne presenteranno , delle quali un buon numero n' è al tempo stabilito pervenuto al nostro segretario perpetuo : mi lusingo di vedere da buon successo corrisposta la mia aspettazione , tendente ad utilità della scienza che per tutta la mia vita ho coltivata , e cercata promuovere . Ed allorchè di esse risposte ne avrà severamente giudicato la nostra classe matematica , sarà mia cura presentarvi il parallelo delle diverse soluzioni, che finora un tal problema ha avute , per quindi valutare non pure il loro merito assoluto , ma anche il relativo ; e far conoscere quanto abbiano a ciò potuto contribuire i metodi adoperativi. Per ora non voglio tralasciare di prevenirvi , esser tale la natura di questo problema, da offrire a chi geometricamente il cerca risolvere nuove verità ed importanti ; sicchè la Geometria avrà sempre guadagnato qualche cosa da'tentativi per risolverlo rimasti anche infruttosi. Ed è questo un altro non piccolo vantaggio del metodo geometrico ; poichè sicuramente dalle ricerche puramente analitiche fatte per risolvere un problema geometrico nulla rimarrà a raccogliere , quando alla soluzione di esso non si pervenga . Ma di tutte le cose che finora ho accennate solamente , mi serbo a render conto distinto nel mio lavoro che mi sono più volte compromesso presentarvi .

Quel giornale che profferì sul terzo quesito l' erronea sentenza di cui sopra ho ragionato , attribuiva a me l' averlo escogitato ; il che io ben volentieri accetterei senza arrossirne , se fossi solito a farmi un manto dell' altrui stoffa : però mi veggo nell' obbligo dichiarare , che , sebbene lo ignorassi , trovavasi esso proposto nel vol I. degli *Annali ec.* , a *pag.* 196 , e quindi fin dall' anno 1810 , e non

già nel modo come da me n' è stata limitata l' enunciazione, ma dicendovisi generalmente: *Iscrivere in un tetraedo qualunque ec.* Anzi è degno di avvertenza, che mentre quegli accurati compilatori, nel proporre il problema d' *iscrivere in un poligono del numero n di lati altrettanti cerchi, tangenti ognuno due di que' lati, e due de' cerchi iscritti,* non tacquero anche il semplice sospetto ch' essi avevano di poter questo essere indeterminato, nulla credettero poi necessario a notare sul problema della piramide, che subito dopo quello soggiugnevano, nel modo poc' anzi accennato. Nè tampoco il fecero le tante volte, che riproposero lo stesso problema; nè alcuno mai di que' matematici cui cadde sotto gli occhi tal proposta, e forse provaronsi a risolverla, pur per ombra sospettò della genuina proposizione di questo problema. Ed esso di fatti trovasi identicamente riproposto a *pag.*287 del vol. II. *Annali ec.*, e poi nel vol.X. a piè di pagina delle ricerche del sig. Lechmütz di Berlino, si trova la seguente nota: « La semplicità di questa soluzione impegnerà forse alcuno a tentar quella del problema analogo » pel tetraedo, ch' è stato proposto a *pag.* 287 del vol. II. di » questa raccolta. « Posteriormente il Gergonne ne rinnova l' idea nella risposta al Poncelet, di cui sopra si è detto. Finalmente nel vol. XVII., riportandosi l' estratto del lavoro dello Steiten, si parla anche delle ricerche da costui fatte con buon successo, per la soluzione del problema della piramide.

Conchiuderò dunque, per non più trattenervi in superflue dicerie, che dalle cose esposte rilevasi abbastanza, esser le quistioni da me proposte al premio assai importanti al progresso delle scienze matematiche, ed atte a conseguire l' oggetto, che nel programma ho dichiarato.

PARTE III.

ESPOSIZIONE DI TALUNE DELLE RICERCHE FATTE PER RISOLVERE I PROBLEMI ENUNCIATI NEL PROGRAMMA.

In questa terza parte, come ho precedentemente promesso, non farò altro che abbozzare tutte quelle materie concernenti le ricerche finora esposte, che essendo meno ovvie, hanno potuto sfuggire l' attenzione de' miei colleghi; perchè possano essi tenerle presenti nella discussione delle risposte al programma: e che dovranno poi a me servire di base al parallelo che mi ho proposto eseguire, ed alla difficile conseguenza, che da questo dovrò trarre, a vantaggio ed istruzione della gioventù, che apprende, o coltiva i metodi d' inventare.

NUM. I.

Soluzione con l' analisi pura recata dal Gergonne al problema del Cramer (*indicata a p.* 33).

Il sig. Gergonne fin dal 1810 occupatosi di tal problema pel solo cerchio, ne diede una soluzione, la quale fu inserita nelle *Memoires de l' Academie du Gard*, che a noi non è stato affatto possibile vedere; ma ce ne fidiamo a lui medesimo; che ne dà il calcolo come laborioso assai. Posteriormente nel vol. I. de' suoi *Annali ec.*, che corrisponde all' anno stesso, *pag.* 126, esponeva la sola costruzione di tal problema, supprimendo l' analisi, ed invitando a dimostrarla. Vi fu chi gli avvertì potersi tal sua costruzione

estendere alle curve coniche in generale; e però così enunciollo di nuovo a *pag.* 259 del volume stesso. Dopo ciò egli medesimo vi riporta due altre soluzioni geometriche, l'una del professore Servois, e l'altra di Rochat, che non è se non la sola costruzione: e dee notarsi, che le tre costruzioni si riducono alla stessa cosa; senza addursi dal Gergonne buone ragioni per mostrare l'anteriorità della sua. Solamente osservasi, che egli per menomare il merito delle ricerche di questi due suoi compatrioti, si espresse su di esse dicendo: *altro essere il legittimare col ragionamento una costruzione già conosciuta, altro il pervenire a questa costruzione*; la qual censura potrebbe forse ritornare a suo svantaggio; se posteriore alle ricerche di que' due professori fosse stata la sua analisi. E dopo tutto questo, nel vol. VII. de' suoi medesimi *Annali ec.* (1817) ripigliando un tale argomento pubblicò la seguente nuova analisi di quella già conosciuta costruzione.

PROBLEMA

Iscrivere in una parabola un triangolo i cui lati passino per tre punti dati.

Soluz. Sieno, P, P′, P″ i punti dati, S, S′, S″ i vertici del triangolo cercato; di tal che P sia su di S′ S″, P′ su di S″ S, e P″ su di S S″,

È evidente che per la risoluzione del problema basti determinare un solo punto S.

Sia $2p$ il parametro della proposta parabola, il cui asse dinoti quello dalle x, e la tangente nel vertice sia quello delle y; e le coordinate de' punti P, P′, P″ sieno come segue

Per P $\begin{cases} a \\ b \end{cases}$ per P′ $\begin{cases} a' \\ b' \end{cases}$ per P″ $\begin{cases} a'' \\ b'' \end{cases}$

Per S $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ per S′ $\begin{cases} x' \\ y' \end{cases}$ per S″ $\begin{cases} x'' \\ y'' \end{cases}$

E perchè S, S′, S″ sono punti della curva, dee essere

$$y^2 = 2px \;,\; y'^2 = 2px' \;,\; y''^2 = 2px'' \quad (\mathrm{I})$$

In secondo luogo, perchè ciascuno de' punti P, P′, P″ è in linea retta con due di quelli, dovrà aversi

$$\frac{x-x'}{y-y'} = \frac{x-a''}{y-b''} \;,\; \frac{x'-x''}{y'-y''} = \frac{x'-a}{y'-b} \;,\; \frac{x''-x}{y''-y} = \frac{x''-a'}{y''-b'} \quad (\mathrm{II})$$

Dal che sei equazioni, per mezzo delle quali posson determinarsi le sei coordinate x, y; x', y'; x'', y'' de' tre punti ignoti S, S′, S″: ma limitando la presente ricerca al solo punto S, basterà eliminare x', y', x'', y'' tra le cinque ultime, e ne risulterà un' equazione in x, y, che combinata con la prima farà conoscere le coordinate del punto richiesto.

Ma si può con una conveniente combinazione di queste sei equazioni ottenerne altre incomparabilmente più semplici. Sottraendo, in fatti, due a due, le equazioni (I) si otterranno le seguenti altre

$$\frac{x-x'}{y-y'} = \frac{y+y'}{2p} \;,\; \frac{x'-x''}{y'-y''} = \frac{y'+y''}{2p} \;,\; \frac{x''-x}{y''-y} = \frac{y''+y}{2p} \quad (\mathrm{III})$$

Paragonando queste equazioni respettivamente alle equazioni (II), se ne dedurranno le seguenti altre

$$\frac{y+y'}{2p} = \frac{x-a''}{y-b''} \;,\; \frac{y'+y''}{2p} = \frac{x'-a}{y'-b} \;,\; \frac{y''+y}{2p} = \frac{x''-a'}{y''-b'} \quad (\mathrm{IV})$$

che liberandole da' denominatori, e rimpiazzandovi respettivamente $2px$, $2px'$, $2px''$, co' loro valori y^2, y'^2, y''^2 ricavati dall' equazioni (I), esse diverranno finalmente

$$\left.\begin{array}{l} yy' - b''(y+y') + 2pa'' = 0 \\ y'y'' - b\,(y'+y'') + 2pa \;\; = 0 \\ y''y - b'\,(y''+y\,) + 2pa' \;\, = 0 \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{V})$$

equazioni libere da x, x', x'', tra le quali non rimane altro a fare che eliminare le y', y'', per ottenere il valore di y.

L' eliminazione di y'' tra le due ultime dà

$$\frac{by' - 2pa}{y' - b} = \frac{b'y - 2pa'}{y - b'}$$

che liberandola da' denominatori, e trasponendo diviene

$$(b-b')yy' + (bb'-2pa)y - (bb'-2pa')y' + 2p(ab'-a'b) = 0$$

Eliminando finalmente y' tra questa e la prima delle equazioni (V), si avrà

$$\frac{(bb'-2pa)\,y + 2p\,(ab'-a'b)}{(b-b')\,y - (bb'-2pa')} + \frac{b''y - 2pa''}{y - b''} = 0$$

e liberando da' denominatori, e riducendo si avrà

$$(bb'+bb''-b'b''-2pa)y^2 + 2\Big[bb'b'' + p\Big(b(a'+a'') - b'(a+a'') - b''(a+a')\Big]y$$
$$+ 2p\,(a'bb'' + a''bb' - ab'b'' - 2pa'a'') = 0$$

E rimpiazzando y^2 con $2px$, tutta l' equazione sarà divisibile per 2, e potrà dopo essere scritta così

$$\left.\begin{array}{l} -\Big(b'b''-p(a'+a'')\Big) \\ +\Big(b\,b'-p(a+a'\,)\Big) \\ +\Big(b\,b''-p(a+a'')\Big) \end{array}\right\} px \left.\begin{array}{l} +\Big(b'b''-p(a'+a'')\Big)\,b \\ -\Big(b\,b'-p(a+a'\,)\Big)b' \\ -\Big(b\,b''-p(a+a'')\Big)b'' \end{array}\right\} y \left.\begin{array}{l} -\Big(b'b''-p(a'+a'')\Big)pa \\ +\Big(b\,b'-p(a+a'\,)\Big)pa' \\ +\Big(b\,b''-p(a+a'')\Big)pa'' \end{array}\right\} = 0$$

la quale si riduce ad

$$(\mathrm{A}) \qquad \Big(b'b''-p(a'+a'')\Big)\Big(by-p(x+a)\Big) = \Big(bb''-p\,(a+a'')\Big)\Big(b'\,y-p\,(x+a'\,)\Big)$$
$$+\Big(bb'-p\,(a+a'\,)\Big)\Big(b''y-p\,(x+a'')\Big)$$

È questa l' equazione, che bisognerebbe combinare con l' altra $y^2 = 2px$, per ottenere le due coordinate x, y del punto cercato S. E giacchè l' equazione $y^2 = 2px$ è quella della parabola data, e l' altra a combinarvisi è del primo grado, può conchiudersi esser questa l' equazione di una retta che incontra la parabola nel punto cercato S.

Tutto si riduce dunque a costruire le retta dell' equazione (A), o ch' è lo stesso trovare due sistemi di relazioni tra x, y, che vi soddisfino.

Or i due sistemi di relazioni i più naturali a stabilirsi per soddisfarla sono i segnenti [24].

$$B' \begin{cases} (C') \quad b'y - p(x + a') = 0 \\ (D') \left(b'b'' - p(a' + a'')\right)\left(by - p(x+a)\right) = \left(bb' - p(a + a')\right)\left(b''y - p(x + a'')\right) \end{cases}$$

$$B'' \begin{cases} (C'') \quad b''y - p(x + a'') = 0 \\ (D'') \left(b'b'' - p(a' + a'')\right)\left(by - p(x+a)\right) = \left(bb'' - p(a + a'')\right)\left(b'y - p(x + a')\right) \end{cases}$$

Dunque il punto determinato dalle equazioni (B′), ed il punto determinato dalle equazioni (B″), sono i due punti delle direzioni (A).

Si potrebbe, per determinare ciascuno di questi punti, ricavare i valori delle x ed y dalle due coppie di equazioni che li danno:

---

[24] Pare assai probabile, che quel nostro professore, il quale commutò con l' ellisse la soluzione del presente problema data dal Gergonne per la parabola, ove costui forse usò di un tal ripiego analitico la prima volta, non rimanendone ben soddisfatto, lo avesse saltato di pianta; dal che avvenne poi, che la sua costruzione, che per altro egli ingenuamente dà per *conosciuta*, non si vide più affatto connessa con l' analisi che ne aveva distesa, nè da potersi in alcun modo dimostrare rigorosamente; per cui egli medesimo ne accenna di ricorrere ad una verifica, per saggiarla.

ma è incomparabilmente più comodo di costruire le quattro rette (C′) , (D′) , (C″) , (D″) . L' intersezione delle due prime sarà il punto (B′) , quella delle due altre il punto (B″) .

Esamineremo poi ciò che possono essere le rette (C′) , (C″); per ora occupiamoci della costruzione delle (D′) , (D″) , o per meglio dire della costruzione di una di esse ; poichè si vede bene , che (D″) è per rapporto al punto P″ ciò che (D′) è per rapporto a P′ .

La retta (D′) sarà determinata , se noi conoscessimo due punti qualunque di sua direzione . Or si vede che questa retta passa per P′ , da che segue , che non si tratta più , che di trovarne un altro punto . Or questo sarà dato per due relazioni tra x , y , che risolvono egualmente l'equazione (D′) ; e tra tutte le relazioni ch'è possibile scegliere , le più semplici indubitatamente sono le seguenti

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{ll} (\mathrm{C}) & b\,y = p\,(x + a\ ) \\ (\mathrm{C}'') & b''y = p\,(x + a'') \end{array} \right.$$

La retta (D′) è dunque una retta tirata da' punti P′, E′ , e quest' ultimo punto stesso si trova determinato dall' intersezione delle rette (C) , (C″) .

Per ragioni simili , la retta (D″) sarà una retta tirata dal punto P″ , e per un punto E″ intersezione delle due rette (C) , (C′).

La nostra costruzione si trova dunque ridotta così a quella delle tre rette (C) , (C′) , (C″) , o piuttosto a quella della prima solamente ; poichè le due altre sono respettivamente , per rapporto a' punti P′, P″, ciò che questa è per rapporto al punto P [15].

[15] Parrebbe regolarmente che qui si dovesse arrestare l'analisi, e cominciare la costruzione : ma per eseguir questa il metodo adoperatovi esige , che una nuova analisi , tutta ipotetica , arbitraria , e per nulla connessa con la precedente , ch' è quella del problema , si stabilisca sulla locale da costruirsi , come dal

Or sia preso sulla parabola data un punto qualunque (x', y') ; la tangente la curva in tal punto sarà , com' è noto ,

$$y - y' = \frac{p}{y}(x - x')$$

e riducendo , e ponendo $2px'$ per y'^2 , si avrà

$$y y' = p'(x + x') \qquad (1)$$

---

progresso delle ricerche del Gergonne, in questo caso ed in altri simili rilevasi. E siffatto ripiego improprio all' analisi di un problema , potrebbe far sospettare . che si fosse preso *per legittimare costruzione già conosciuta* . Ciò renderà per ora ragione di aver noi detto nel programma , che tuttavia desideravasi di tal problema un' *adequata analitica soluzione* , niun' altra esistendone diversa da questa . E starà però ancor salda l' opinione estrinsecata dal Lhuilier , per la soluzione algebrica di tal problema , da noi ripetuta a *pag.*32., che , come avverte il Gergonne in conchiudere la sua presente soluzione , gli fu principale incentivo a fare ogni sforzo onde riescire in tal ricerca col metodo *delle coordinate*. Ma pure egli avrebbe dovuto ciò dire dopo la prima volta che occupossene , che corrispondeva appunto all' epoca in cui il Lhuilier in quel modo si espresse ; ma allora egli medesimo rigettava tal sua soluzione , per intraprenderne un' altra , o piuttosto lavorando col calcolo in altro modo da pervenire più speditamente alla stessa costruzione già ricavata da quella. E forse tutto questo miglioramento , ottenuto da esso , dopo il non corto periodo di ben otto anni , sarà dovuto all' aver evitato di procedere all' eliminazione tra l' equazione $y^2 = 2px$, e l' altra (A) risultamento di un non breve calcolo , mediante quel ripiego analitico di cui si è accennato nella precedente nota, e che al Lhuilier non era certamente noto, quando espresse quella sua opinione. A ciò potrebbe anche aggiugnersi , che mentre il sig.Gergonne mostravasi desideroso della soluzione del problema in quistione per un poligono in generale , promettendo di estendere a questo , *in un prossimo articolo* , lo stesso procedimento tenuto per quello del triangolo , ciò non si vide però aver mai luogo ; sebbene una costruzione ne avesse presentata il Poncelet , che circolava in Francia fin dal 1814 , della quale promettevane l' analisi , che nè pur credo abbia mai data : nè alcun altro che io sappia finora si è fidato di addentarlo col

Supponiamo in secondo luogo che si tratti di menare alla parabola una tangente per un punto esteriore (a , b) ; rappresentando per x' , y' le coordinate del punto di contatto , si avrà per determinare questo punto le due equazioni

$$y'^2 = 2px' \text{ , e } by' = p(x'+a) \quad (2)$$

delle quali la prima esprime che il punto di contatto è nella curva , mentre la seconda esprime che il punto (a , b) soddisfa all' equazione (1) . Poichè dunque l' equazione $y'^2 = 2px'$ è di secondo grado , e l' altra solamente del primo , si avranno due punti di contatto , e conseguentemente due tangenti pe' punti (a , b) .

Nella ricerca di questi due punti di contatto , in luogo di ricavare dalle equazioni (2) i due sistemi di valori , ch' essi somministrano per x , y , ritorna allo stesso , ed è più comodo di costruire le linee esprimenti queste due equazioni . Poichè dunque la prima è quella della nostra stessa parabola , e che l'altra è solamente del primo grado , dee quest' ultima appartenersi ad una retta , che passa pe' punti ove le due tangenti toccano la curva , cioè a dire che questa retta è la polare de' punti (a , b) .

Si vede dunque da ciò , che le nostre tre rette (C), (C'), (C'') alla costruzione delle quali abbiamo ridotto il problema , non sono altro , che le polari rispettive de' tre punti P , P' , P'' .

Or siccome la polare [26] di un punto dato , nel piano di una sezione conica , può costruirsi con la sola riga , ne segue , che noi possiamo estendere la nostra costruzione ad una sezione conica qualunque : ed ecco a che si riduce .

---

metodo *delle coordinate*. Ma di tutte queste cose altrove dovremo ragionare più estesamente .

[26] La teorica delle polari di cui tanto si fa uso nella moderna analisi pura , è ovvia nella Geometria sublime antica , e compresa nelle istituzioni di questa *(Si riscontrino le Sezioni Coniche illustrate dal Giannattasio)* .

Costruzione. Sieno tre punti P , P′ , P″ dati nel piano di una linea di second' ordine qualunque ; supponiamo che si tratti d'iscrivere nella curva un triangolo i cui lati, prolungati se bisogna , passino respettivamente pe' tre punti dati.

Sieno S , S′ , S″ i tre vertici ignoti , dovendo P trovarsi su di S′S″ , P′ su di S″S , e P″ su di SS′.

Sieno costruite le polari de' punti P , P′ , P″ , e rappresentiamole respettivamente per C , C′ , C″ ; C′ e C″ tagliandosi in E , C″ e C in E′ , C e C′ in E″ . Sieno tirate PE , P′E′ , P″E″ , che taglino respettivamente C , C′ , C″ in B , B′ , B′ ; allora la curva sarà tagliata respettivamente in S da B′ B″ , in S′ da B″B , in S″ da BB′.

Dee osservarsi , al più , che ciascuna di queste rette taglierà la curva in due punti , e che così il problema avrà due soluzioni . Dee osservarsi ancora , come l'abbiamo già fatto più sopra , che tutto può ridursi alla costruzione del punto S, dal quale è facile conchiuderne gli altri due . È dunque superfluo di determinare il punto B , e conseguentemente di condurre la PE .

OSSERVAZIONI.

Dopo aver veduto in quanti modi , e per quanto tempo siesi tentata la soluzione del problema del Cramer generalizzato , ed esteso alle curve coniche , non è fuor di proposito osservare , che negli stessi *Annali ec.* , vol. VIII. (*an.* 1818) , recasi del distinto professore sig. Durrande la costruzione di un problema analogo sulla sfera , così impropriamente enunciato : *Iscrivere in un cerchio segnato sulla superficie di una sfera un triangolo sferico, i cui lati passino per tre punti dati sulla stessa superficie* ; e poi una tal

costruzione estendesi al caso generale di più punti dati sulla superficie sferica. Ma di quel problema particolare ne aveva già esibita la costruzione l'Eulero, nella più volte citata memoria sul *problema di Pappo*, sebbene in modo poco concepibile : e del generale analogo ne fu da noi recata la soluzione negli *Opuscoli Matematici della Scuola del Fergola* pubblicati nel 1811 , riducendolo immediatamente a quello dell'iscrizione di un poligono nel cerchio, ed enunciandolo nel seguente modo: *Dato un cerchio minore in un emisfero , dividerlo in un dato numero di archi, sicchè condotti i cerchi massimi per gli estremi di ciascheduno , passino per altrettanti punti dati nelle superficie di esso emisfero*. Nè sappiamo persuaderci , che una tale soluzione , ed il libro ove contenevasi, pubblicato mentre in Napoli tanta frequenza vi era di francesi , avesse dovuto , dopo il non breve periodo di otto anni , ignorarsi ancora oltremonti ; dove parecchie copie di quel libro avevan dovuto pervenire ; e se non altre , almanco le da noi donate a distinti soggetti di quella nazione , mentre tra noi dimoravano . Procedendo più innanzi rendemmo universale l' enunciazione , estendendola a qualunque solido di rivoluzione , non escluso il cono ed il cilindro , assegnando per questi i punti dati nello spazio. Dopo tutto ciò conchiudevamo dimandando a' coltivatori della moderna Geometria analitica , di *risolvere e costruire giusta i loro metodi*, *e per nostro gradimento i problemi generali di coteste mirabili iscrizioni* [17]. Ed ora che il presente programma ne porge più propria l' occasione , rinnoviamo ad essi istantemente le preghiere di occuparsi di queste ricerche , per sempre più raccoglier materia pel parallelo , che ci abbiamo proposto istituire de' metodi per l' invenzione geometrica.

---

[17] Opusc. III, probl. 3 , e Conchiusione degli editori .

NUM. II.

Soluzione del prof. Malfatti del seguente

PROBLEMA[1].

Iscrivere in un triangolo dato tre cerchi, che si tocchino vicendevolmente, e ciascuno tocchi due lati del triangolo.

Sia ABC il triangolo proposto, O il centro del cerchio in esso iscrittibile, ed A′, B′, C′ rappresentino i contatti di questo co' lati BC, CA, AB; le congiungenti OA, OB, OC divideranno per metà gli angoli rispettivi del triangolo; e le altre OA′, OB′, OC′ saranno perpendicolari a' lati di esso. Ed essendo i tre angoli delle OA, OB, OC intorno al punto O uguali a quattro retti; sarà la somma degli altri AOC′, COB′, BOA′, uguale a due retti: ed è chiaro inoltre essere AC′ la tangente dell' angolo AOC′, CB′ quella dell angolo COB′, e BA′ quella dell' angolo BOA′. Or l' angolo COB′ = 2 *retti* — (*ang*. AOB′ + *ang*.BOA′): che però dinotando con r il raggio del cerchio, e ponendo *tang*.AC′ = s, *tang*.CB′ = t, e *tang*.BA′ = u, per le note formole trigonometriche si avrà l' espressione di

* *fig. 1.*

$$u = \frac{r^2(s+t)}{st - r^2}$$

Conviene intanto dedurre da questa espressione alcune conseguenze necessarie per le calcolazioni che seguiranno.

Così si ha da essa

I°. $stu = r^2(s+t+u)$, $\frac{stu}{r^2} = s+t+u$ (1) [2]

[1] Mem. della Società Italiana vol. X anno 1803 *pag.* 235.

[2] Per non lasciare sterili le cose, che qui rechiamo di altri, continue-

II°. Essendo $$u = \frac{r^2(s+t)}{st - r^2}$$

Elevando a quadrato sarà

$$u^2 = \frac{r^4 s^2 + 2r^4 st + r^4 t^2}{(st - r^2)^2}$$

E si avrà poi

$$r^2 + u^2 = r^2 + \frac{r^4 s^2 + 2r^4 st + r^4 t^2}{(st - r^2)^2}$$

$$= \frac{r^2(s^2t^2 + r^2 s^2 + r^2 t^2 + r^4)}{(st - r^2)^2}$$

$$= \frac{r^2(r^2 + s^2)(r^2 + t^2)}{(st - r^2)^2}$$

E quindi

$$\sqrt{(r^2 + u^2)} = \frac{r\sqrt{(r^2 + s^2)} \times \sqrt{(r^2 + t^2)}}{st - r^2}$$

o sia

$$\frac{(st - r^2)\sqrt{(r^2 + u^2)}}{r} = \sqrt{(r^2 + s^2)} \times \sqrt{(r^2 + t^2)} \quad (2)$$

III°. Si ha inoltre dalla (1)

$$s + t = \frac{(st - r^2)\,u}{r^2}, \quad \text{ed} \quad (s + t)^2 = \frac{(st - r^2)^2 u^2}{r^4}$$

D' onde

$$s^2 + t^2 = \frac{(st - r^2)^2 u^2}{r^4} - 2st$$

---

remo ad andarvi notando alcune opportune riflessioni e conseguenze. E cominciando da questa prima equazione ottenuta dal Malfatti, nell' analisi del suo problema, essa dimostra, che: *In un triangolo ove sia iscritto il cerchio, il semiperimetro è quanto il prodotto delle tangenti il cerchio da' tre vertici, diviso pel quadrato del raggio di questo*. E ciò conduce a determinare un tal raggio.

e quindi

$$s^2+t^2-u^2=\frac{(st-r^2)^2u^2}{r^4}-2st-u^2=\frac{s^2t^2u^2}{r^4}-\frac{2stu^2}{r^2}-2st \qquad (3)$$

E similmente si avrebbero le altre equazioni

$$s^2+u^2-t^2= \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{s^2t^2u^2}{r^4}-\frac{2st^2u}{r^2}-2su$$

$$t^2+u^2-s^2= \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{s^2t^2u^2}{r^4}-\frac{2s^2tu}{r^2}-2tu$$

Premessi questi risultamenti trigonometrici , sieno ora X , Y , Z i centri de' tre cerchi iscritti nel triangolo con le condizioni proposte , e P, Q, R i punti di contatto co' lati AB, BC, CA ; pongasi $AP=m$, $BQ=n$, $CR=p$, ed i raggi XP , YQ , ZR si dinotino per x , y , z respettivamente ; risulterà $YN=2\sqrt{xy}$ [30] ;

---

[30] Pongasi la tangente comune de' cerchi de' centri X , Y , cioè la

$$PQ = NY = 2\sqrt{xy} = T$$

l' altra de' cerchi de' centri Z , Y , cioè la

$$RQ' \ldots\ldots = 2\sqrt{yz} = T'$$

e la terza di quelli de' centri X , Z , cioè la

$$P'R' \ldots\ldots = 2\sqrt{zx} = T''$$

si otterranno , moltiplicandone due ad arbitrio , e dividendo per la terza , le tre equazioni

$$\frac{TT''}{T'} = 2x \quad , \quad \frac{TT'}{T''} = 2y \quad , \quad \frac{T'T''}{T} = 2z$$

Cioè : *Il diametro di ciascuno de' tre cerchi da iscriversi, è quarto proporzionale in ordine alla tangente comune degli altri due cerchi , limitata tra' contatti , ed a quelle simili tra esso e ciascun di questi .*

E moltiplicando tutte tre quelle equazioni , o pur le poc' anzi ottenute , risulterà

$$TT'T'' = 8xyz$$

Cioè : *Il parallelepipedo di quelle tre tangenti è quanto quello de' tre diametri de' cerchi da iscriversi .*

e però $2\sqrt{xy}=s+t-m-n$
e similmente $2\sqrt{xz}=s+u-m-p$
e $2\sqrt{yz}=t+u-n-p$ } n. I.

Fin qui l'analisi del problema procede direttamente, ed è ora che il Malfatti supprimendone la continuazione, per occultarne il proseguimento stentato e prolisso, la trasmuta nel seguente teorema.

Dico che con supporre

$$2m=s+t+u-r+\sqrt{(r^2+s^2)}-\sqrt{(r^2+t^2)}-\sqrt{(r^2+u^2)}$$
$$2n=s+t+u-r+\sqrt{(r^2+t^2)}-\sqrt{(r^2+s^2)}-\sqrt{(r^2+u^2)}$$
$$2p=s+t+u-r+\sqrt{(r^2+u^2)}-\sqrt{(r^2+s^2)}-\sqrt{(r^2+t^2)}$$

si verrà a soddisfare alle tre precedenti equazioni n.° I.

Per verificare con tali valori la prima di queste, si uniscano i valori di m ed n; risulterà

$$m+n=s+t+u-r-\sqrt{(r^2+u^2)}$$
ed
$$s+t-m-n=r-u+\sqrt{(r^2+u^2)}$$

e così pure si avrebbero

$$s+u-m-p=r-t+\sqrt{(r^2+t^2)}$$
$$t+u-n-p=r-s+\sqrt{(r^2+s^2)}$$ [31]

---

[31] Ponendo in una qualunque di queste tre equazioni, invece de' simboli, le rette che essi rappresentano, otterrassi immediatamente, e senza bisogno di altro apparecchio, la seguente geometrica conversione:

Nel triangolo ABC sieno iscritti tre cerchi che si tocchino tra loro, e ciascuno con due lati del triangolo; la tangente intermedia tra due contatti di questi cerchi con un lato del triangolo, sarà uguale al raggio del cerchio iscrittibile nel triangolo, insieme con la congiugnente il centro di questo col vertice dell' angolo opposto a quel lato, meno la tangente di un tal cerchio che gli corrisponde dal vertice stesso. E però, supposto essere C un tal vertice, se questa congiugnente CO si prolunghi fino ad incontrare la circonferenza del cerchio iscritto nel triangolo in C″, e descrivasi col centro C, intervallo CA′ l'arco circolare A′C‴, che interseghi CC″, in C‴; sarà C″C‴ uguale a PQ. E la stessa costruzione avrà luogo per le tangenti esterne RQ′, P′R′.

Il Malfatti passò per sopra a questo teorema, che presentavagli intuitivamente

Or ne' valori m ed n ponendo in luogo di $s+t+u$ l' equivalente $\frac{stu}{r^2}$, e fatto per economia di calcolo $\frac{stu}{r^2}-r=A$, $\sqrt{(r^2+s^2)}=S$, $\sqrt{(r^2+t^2)}=T$, $\sqrt{(r^2+u^2)}=V$, si avrà

$$2m = A - V + S - T$$
$$2n = A - V - (S - T)$$

Le quali equazioni moltiplicate l' una per l' altra, daranno

$$4mn = (A-V)^2 - (S-T)^2 = A^2+V^2-S^2-T^2-2AV+2ST$$

ove i primi quattro termini costituiscono la parte razionale dell' equazione, e gli altri due l' irrazionale.

Rimessi pertanto nella prima i valori di A, V, S, T, si otterrà

$$A^2+V^2-S^2-T^2 = \frac{s^2t^2u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r} - (s^2+t^2-u^2)$$
$$= \frac{s^2t^2u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r^2} - \frac{s^2t^2u^2}{r^4} + \frac{2stu^2}{r^2} + 2st$$
$$= \frac{st}{r^2}(-2ur + 2u^2 + 2r^2)$$

---

ciascuna di quelle tre sue equazioni, sebbene dal proseguimento del calcolo veggasi rigorosamente da lui dimostrato, mirando a giugnere allo scopo suo principale della costruzione elegantissima, ch' egli già teneva del problema in quistione.

Or ammessa un tal teorema, ecco in qual modo elegante potrà ottenersi la soluzione del problema del Malfatti.

Essendo $\overline{PQ}^2 = \overline{NY}^2 = \overline{XY}^2 - \overline{NX}^2 = \overline{PX+QY}^2 - \overline{PX-QY}^2 = 4PX \times QY$; e similmente $RQ'^2 = 4ZR \times YQ'$, sarà $\overline{PQ}^2 : \overline{Q'R}^2 :: PX$ a ZR: e ponendo per PQ e Q'R le loro uguali $C'''C''$ ed $A'''A''$; sarà $\overline{C'''C''}^2 : \overline{A'''A''}^2 :: PX : ZR$, e però sarà data la ragione di $PX : RZ$; ma è pur dato il loro rettangolo, come uguale al quadrato di $\frac{1}{2}B''B'''$. Adunque saranno dati i raggi PX, ZR. Ed in modo analogo si determinerà anche quello YQ del terzo cerchio.

Rimettendo poi nella seconda, ossia nella parte irrazionale i valori A, V, S, T si ha

$$-\left(\frac{2stu}{r^2}-2r\right)\sqrt{r^2+u^2}+2\sqrt{r^2+s^2}\times\sqrt{r^2+t^2}$$

$$=\left(\frac{-2stu}{r^2}+2r\right)\sqrt{r^2+u^2}+2\,\frac{(st-r^2)\sqrt{r^2+u^2}}{r}$$

$$=\left(\frac{-2stu+2rts}{r^2}\right)\sqrt{r^2+u^2}$$

e quindi dall' equazione (A) si ricava

$$\frac{4r^2mn}{st}=-2ur+2u^2+2r^2+(-2u+2r)\sqrt{r^2+u^2}=(r-u+\sqrt{r^2+u^2})^2$$

Intanto si ha

$$\left.\begin{array}{l}A'C : C'O :: AP : PX \\ B'C : C'O :: BQ : QX\end{array}\right\}\text{ E ne' simboli }\begin{array}{l}s : r :: m : x = \dfrac{rm}{s} \\ t : r :: n : y = \dfrac{rn}{t}\end{array}$$

Si avrà dunque $\quad 4xy=\frac{4r^2mn}{st}$

E perciò $\quad 4xy=(r-u+\sqrt{r^2+u^2})^2$

D' onde $\quad 2\sqrt{xy}=r-u+\sqrt{r^2+u^2}=s+t-m-n$

E così prosegue a verificar le altre.

Tralasciamo di qui recar la costruzione semplicissima del problema, potendo ognuno ravvisarla da se medesimo, in conseguenza dell' analisi.

NUM. III.

Soluzione del problema precedente fatta da' compilatori degli *Annali delle Matematiche* (*indic. a pag.* 42).

Sieno A, B, C i vertici del triangolo dato, c, c', c'' i lati respettivamente opposti, X, Y, Z i centri de' cerchi opposti l' un l' altro a que' lati, ed r, r', r'' esprimano i raggi rispettivi di questi cerchi: e sieno adottate le abbreviazioni seguenti:

$$c + c' + c'' = 2s \qquad \begin{aligned} s - c &= p \\ s - c' &= p' \\ s - c'' &= p'' \end{aligned}$$

$$R^2 s = p p' p'' \qquad \begin{aligned} c' c'' p &= s d^2 \\ c c'' p' &= s d'^2 \\ c c' p'' &= s d''^2 \end{aligned}$$

Sarà R il raggio del cerchio iscrittibile nel triangolo [31], d, d', d'' saranno le distanze rispettive del centro di questo da punti A, B, C, e p, p', p'', saranno le distanze rispettive de' medesimi punti da quelli di contatto di questo cerchio co' lati del triangolo, o ch' è lo stesso i raggi de' cerchi, che avendo per centri i punti A, B, C si toccherebbero due a due. Finalmente si dedurranno dalle equazioni quassù recate le relazioni seguenti

$$p + p' + p'' = s \qquad \begin{aligned} p' p'' d^2 &= R^2 c' c'' \\ p p'' d'^2 &= R^2 c c'' \\ p p' d''^2 &= R^2 c c' \end{aligned}$$

[31] Ved. not. num. 29.

$$R\,cc'c'' = s\,d\,d'd'' \qquad \begin{aligned} p\;\; d'd'' &= R\,c\,d \\ p'\;\; d\,d'' &= Rc'd' \\ p''\;\; d\,d' &= Rc''d'' \end{aligned}$$

Ciò posto, sieno abbassate da X, Y, su c'' le perpendicolari $XP = r$, $YQ = r'$, ed unita XY si conduca per Y la YN parallela a c'', che incontri XP in N; sarà

$$YN = c'' - AP - BQ = \sqrt{(r+r')^2 - (r-r')^2} = 2\sqrt{rr'}.$$

Ma si ha

$$AP = r\;cot.\;\tfrac{1}{2}A = r\sqrt{\frac{ps}{p'p''}} = \frac{p}{R}\,r$$

$$BQ = r'\;cot.\;\tfrac{1}{2}B = r'\sqrt{\frac{p's}{pp''}} = \frac{p'}{R}\,r'$$

Sostituendo dunque si avrà

$$c'' - \frac{p}{R}\,r - \frac{p'}{R}\,r' = 2\sqrt{r\,r'}$$

Liberando da' denominatori, trasponendo, e formando le equazioni analoghe, verrà in fine

$$\begin{aligned} p\,r + 2R\sqrt{r\,r'} + p'\,r' &= R\,c'' \\ p\,r + 2R\sqrt{r\,r''} + p''r'' &= R\,c' \\ p'r' + 2R\sqrt{r'\,r''} + p''r'' &= R\,c \end{aligned}$$

che sono le equazioni al problema

Se pongasi $\quad r' = rx'^2 \qquad r'' = rx''^2$

queste tre equazioni diverranno

$$\begin{aligned} r(\,p + 2Rx' + p'\,x'^2\,) &= R\,c'' \\ r(\,p + 2Rx'' + p''x''^2) &= R\,c' \\ r(\,p'x'^2 + 2Rx'\,x'' + p''x''^2) &= R\,c \end{aligned}$$

l'ultima dà $\qquad r = \dfrac{Rc}{p'x'^2 + 2R\,x'x'' + p''x''^2}$

Sostituendo questo valore nelle due prime, e liberando da' denominatori, esse diverranno

$$(A') \quad c(p+2Rx'+p'x'^2) = c''(p'x'^2+2Rx'x''+p''x''^2)$$
$$(A'') \quad c(p+2Rx''+p''x''^2) = c'(p'x'^2+2Rx'x''+p''x''^2)$$

Non v' ha dunque altro a fare, che ricavare da queste due equazioni i valori di x', x'', per sostituirli in quello di r.

Se moltiplichisi l' equazione (A') per $\frac{c'pp''}{s}$, e l' equazione (A'') per $\frac{c''pp'}{s}$, sviluppando tutte due, mettendo per $pp'p''$ il suo valore $R^2 s$, ed osservando che si ha

$$s(c-c'') = c(s-c'') - c''(s-c) = cp''-c''p$$
$$s(c-c') = c(s-c') - c'(s-c) = cp'-c'p$$
$$\frac{c'c''p}{s} = d^2 \quad , \quad \frac{cc''p'}{s} = d'^2 \quad ; \quad \frac{cc'p''}{s} = d''^2$$

esse diverranno

$$\Big(d(Rx'+p''x'')\Big)^2 - \Big(d''(Rx'+p)\Big)^2 = o$$
$$\Big(d(Rx''+p'x')\Big)^2 - \Big((d'(Rx''+p)\Big)^2 = o$$

e potranno esser messe sotto quest' altra forma

$$\Big(d(Rx'+p''x'')+d''(Rx'+p)\Big)\Big(d(Rx'+p''x'')-d''(Rx'+p)\Big) = o$$
$$\Big(d(Rx''+p'x')+d'(Rx''+p)\Big)\Big(d(Rx''+p'x')-d'(Rx''+p')\Big) = o$$

Combinando in tutte le maniere possibili un fattore della prima con uno della seconda, si otterranno quattro soluzioni del problema. Si può al più osservare, che la differenza tra i primi ed i secondi fattori si aggira solamente su i segni di d', d''.

Se dimandisi che i cerchi cercati si tocchino esteriormente, e sieno tutti e tre interiori al triangolo dato, si potrà togliere l' incertezza nella scelta dei fattori, per la considerazione di un caso particolare estrema-

mente semplice: questo è quello in cui gli angoli B, C sono tutti due retti[33]; si ha allora $R = p' = p'' = \frac{1}{2}c$, $d' = d'' = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$, $p = d = \infty$ ed $x' = x''$; in conseguenza le due equazioni divengono ugualmente

$$(2x' + \sqrt{2})\,(2x' - \sqrt{2}) = 0$$

e come in questo caso dee aversi evidentemente $x' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, risulta che sono allora i secondi fattori che bisogna prendere.

Rigettando dunque i primi fattori, si avrà per determinare x', x'' le due equazioni

$$d(Rx' + p''x'') = d''(Rx' + p)$$
$$d(Rx'' + p'x') = d'(Rx'' + p)$$

le quali danno

$$x' = p\,\frac{d''(d-d')R - p''dd'}{(d-d')(d-d'')R^2 - p'p''d^2} = \frac{1}{R}\,d''\,\frac{c''(d-d')}{c'c'' - (d-d')(d-d'')}$$

$$x'' = p\,\frac{d'(d-d'')R - p'dd''}{(d-d')(d-d'')R^2 - p'p''d^2} = \frac{1}{R}\,d'\,\frac{c' - (d-d'')}{c'c'' - (d-d')(d-d'')}$$

E ricordando che si ha

$$pp'd''^2 = R^2cc', \quad pp''d'^2 = R^2cc'', \quad pd'd'' = Rcd$$

---

[33] La presente supposizione non è già *un caso particolare estremamente semplice* del problema nel modo come è stato proposto; sarebbe al contrario questo un caso particolare di essa generalmente enunziata così: *date tre rette comunque in un piano; descrivere tre cerchi i quali si tocchino tra loro, e ciascuno tocchi ancor due di quelle tre rette*: ma allora la soluzione non doveva procedere partendo dalla natura del triangolo, come nel presente caso si è fatto. E la supposizione di sopra accennata sarebbe un peccato in Geometria, di quelli contro cui *merito reclamaret Euclides et tota Euclideorum schola*, alla quale, senza arrossirne, protestiamo rispetto ed addizione.

si conchiuderà

$$p'x'^2 = pc \frac{c'\left(c''-(d-d')\right)^2}{\left(c'c''-(d-d')(d-d'')\right)^2},$$

$$2Rx'x'' = pc \frac{2d\left(c''-(d-d')\right)\left(c'-(d-d'')\right)}{\left(c'c''-d(d-d')(d-d'')\right)^2}$$

$$p''x''^2 = pc \frac{c''\left(c'-(d-d'')\right)^2}{\left(c'c''-(d-d')(d-d'')\right)^2}.$$

Sostituendo finalmente nel valore trovato precedentemente per r, si avrà

$$r = \frac{R}{p} \frac{\left(c'c''-(d-d')(d-d'')\right)^2}{c'\left(c''-(d-d')\right)^2 + 2d\left(c''-(d-d')\right)\left(c'-(d-d'')\right) + c'\left(c'-(d-d'')\right)^2}$$

---

[34] L'espressione del raggio r ne' simboli del Gergonne, e secondo la soluzione del Malfatti è la seguente semplicissima

$$r = \frac{R}{2p}(s + d - R - d' - d'').$$

E questa sebbene debba essere identica alla qui sopra trovata, pure le si mostra incomunicante, come lo stesso Gergonne ha notato: il che dee attribuirsi al sistema di ricerca da costui adottato. Nè tampoco, dopo aver conosciuta questa, riescigli di avvertire il mezzo di ridurvela; che altrimenti la sua soluzione lo avrebbe condotto alla stessa elegante costruzione del Malfatti, nè egli avrebbe dovuto vedersi costretto a contentarsi di una soluzione aritmetica.

NUM. IV.

Verifica de' compilatori degli *Annali delle Matematiche* del teorema assunto dal Malfatti (*indic. a p.*43)

Prima di venire all' oggetto, bisogna stabilire tra i dati del problema delle equazioni di relazione proprie a semplificare il calcolo.

Si ha
$$\left.\begin{array}{l} c + c' + c'' = 2s \\ s - c' = p' \\ s - c'' = p'' \end{array}\right\} \text{ Veggasi la loro soluzione}$$

sommando queste equazioni, e riducendo viene

$$c = p' + p''$$

d' onde $\quad c^2 \;\text{ o }\; c(s-p) = p'^2 + 2p'p'' + p''^2$

e moltiplicando per p, e ponendo per $p\,p'p''$ il suo valore R^2s

$$psc = 2R^2s + cp^2 + pp'^2 + pp''^2$$

Mettendo per s nel secondo membro il suo valore $c+p$, viene

$$psc = 2R^2c + 2R^2p + cp^2 + pp'^2 + pp''^2$$

Ma si ha

$$p^2 = d^2 - R^2 \quad , \quad p'^2 = d'^2 - R^2 \quad , \quad p''^2 = d''^2 - R^2$$

sostituendo dunque e riducendo verrà

$$psc = cR^2 + cd^2 + pd'^2 + pd''^2$$

ed aggiugnendo a quest' ultima equazione l' altra

$$o = 2Rcd - 2pd'd''$$

l' equazione risultante potrà esser posta sotto questa forma

$$psc = c(R+d)^2 + p(d' - d'')^2$$

Ponendovi per c il suo valore $s-p$, essa diverrà

$$p\Big(s^2 + (R+d)^2 - (d' - d'')^2\Big) = s\Big((R+d)^2 + p^2\Big)$$

Aggiugnendo a quest' equazione l' identica

$$-2ps(R+d) = -2sp(R+d)$$ [15]

l' equazione risultante potrà esser posta sotto questa forma

$$p\left((s-R-d)^2-(d'-d'')^2\right)=s(R+d-p)^2$$

E come in tutte queste formole si può a piacere commutare gli accenti, si avrà

$$(A)\qquad p\left((s-R-d)^2-(d-d')^2\right)=s(R+d-p)^2$$

$$(A')\qquad p'\left((s-R-d')^2-(d''-d)^2\right)=s(R+d'-p')^2$$

$$(A'')\qquad p''\left((s-R-d'')^2-(d-d')^2\right)=s(R+d''-p'')^2$$

Ciò posto, si è veduto, che le equazioni del problema sono

$$(B)\qquad p'r'+2R\sqrt{r'r''}+p''r''=Rc$$

$$(B')\qquad p''r''+2R\sqrt{r''r}+pr=Rc'$$

$$(B'')\qquad pr+2R\sqrt{rr'}+p'r'=Rc''$$

e si tratta provare che vi si soddisfa ponendo

$$(C)\qquad 2p'r=R(s-R+d-d'-d'')$$

$$(C')\qquad 2p'r'=R(s-R+d'-d''-d)$$

$$(C'')\qquad 2p''r''=R(s-R+d''-d-d')$$

Per ciò sieno da prima sommate due a due le equazioni (C,C′,C″,) si avrà dividendo per 2

$$(D)\qquad p'r'+p''r''=R(s-R-d)$$

$$(D')\qquad p''r''+pr=R(s-R-d')$$

$$(D'')\qquad pr+p'r'=R(s-R-d'')$$

---

[15] Protestiamo di non aver voluto per nulla alterare le espressioni ed i passaggi analitici de' compilatori, nelle loro cose, che da noi recansi.

Moltiplicando le stesse equazioni due a due verrà

$$(E) \qquad 4p'p''r'r'' = R^2\Big((s-R-d)^2 - (d'-d'')^2\Big)$$
$$(E') \qquad 4p''p\,r''r = R^2\Big((s-R-d')^2 - (d''-d)^2\Big)$$
$$(E'') \qquad 4pp'rr' = R^2\Big((s-R-d'')^2 - (d-d')^2\Big)$$

Moltiplicando rispettivamente queste ultime equazioni per p, p', p'', e cangiando $pp'p''$ in R^2s, viene

$$(F) \qquad 4R^2s\,r'r'' = R^2p\Big((s-R-d)^2 - (d'-d'')^2\Big)$$
$$(F') \qquad 4R^2s\,r''r = R^2p'\Big((s-R-d')^2 - (d''-d)^2\Big)$$
$$(F'') \qquad 4R^2s\,rr' = R^2p''\Big((s-R-d'')^2 - (d-d')^2\Big)$$

Comparandole con le equazioni (A, A′, A″), e dividendo per s, esse divengono

$$(G) \qquad 4R^2r'r'' = R^2(R+d-p)^2$$
$$(G') \qquad 4R^2r''r = R^2(R+d'-p')^2$$
$$(G'') \qquad 4R^2rr' = R^2(R+d''-p'')^2$$

donde estraendo le radici si deducono le altre

$$(H) \qquad 2R\sqrt{r'r''} = R(R+d-p)$$
$$(H') \qquad 2R\sqrt{r''r} = R(R+d'-p')$$
$$(H'') \qquad 2R\sqrt{rr'} = R(R+d''-p'')$$

le quali sommate respettivamente alle equazioni (D, D′, D″) danno

$$p'r' + 2R\sqrt{r'r''} + p''r'' = R(s-p) = Rc$$
$$p''r'' + 2R\sqrt{r''r} + pr = R(s-p') = Rc'$$
$$pr + 2R\sqrt{rr'} + p'r' = R(s-p'') = Rc''$$

che sono le equazioni al problema.

NUM. V.

Ricerche del sig. Tédenat sulla soluzione del prof. Malfatti del problema de' tre cerchi da iscriversi in un triangolo (*indic. a pag.* 43.)

Secondo Malfatti, se R sia il raggio del cerchio iscritto nel triangolo, p, p', p'' le distanze de' suoi vertici da' punti ove questo cerchio tocca i suoi lati; d, d', d'' le distanze di questi stessi vertici dal centro di un tal cerchio; r, r', r'' i raggi de' tre cerchi iscritti, di maniera che ciascuno tocchi i due altri, e due lati del triangolo, dee aversi

$$\left.\begin{aligned} 2pr &= R(s - R + d - d' - d'') \\ 2p'r' &= R(s - R + d' - d'' - d) \\ 2p''r'' &= R(s - R + d'' - d - d') \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

sommando queste equazioni due a due, e supprimendo il fattore 2 nelle equazioni risultanti, viene

$$\left.\begin{aligned} pr + p'r' &= R(s - R - d'') \\ p'r' + p''r'' &= R(s - R - d) \\ p''r'' + pr &= R(s - R - d') \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Ma c, c', c'' essendo i lati del triangolo, si han pure le equazioni

$$\left.\begin{aligned} pr + 2R\sqrt{rr'} + p'r' &= Rc'' \\ p'r' + 2R\sqrt{r'r''} + p''r'' &= Rc \\ p''r'' + 2R\sqrt{r''r} + pr &= Rc' \end{aligned}\right\} \quad (C)\ [16].$$

[16] Vegg. il n. IV.

Sottraendo da ciascuna di queste la sua corrispondente tra le equazioni (B), dividendo per R i due membri delle equazioni risultanti, ricordando, che $s - c$, $s - c'$, $s - c''$ sono respettivamente eguali a p, p', p'', ottiensi

$$\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{rr'} = d'' + R - p'' \\ 2\sqrt{r'r''} = d + R - p \\ 2\sqrt{r''r} = d' + R - p' \end{array}\right\} \quad (D)$$

Ciò posto sieno ABC il triangolo di cui si tratta, O il centro del cerchio iscritto, A′, B′, C′ i punti di contatto di questo cerchio co' suoi lati, B′A‴C′, A′B‴C′, A′C‴B′ gli archi descritti da' vertici come centri, e con le loro rispettive distanze de' punti B′, C′, A′ per raggi. Sieno inoltre X, Y, Z, i centri de' cerchi i cui raggi rispettivi sono r, r', r''; e sieno P, P′; Q, Q′; R, R′ i punti di contatto di questi cerchi co' lati del triangolo. Sieno finalmente A″, B″, C″ i punti ove AO, BO, CO prolungate al di là del punto O incontrino la circonferenza del cerchio iscritto.

È stato già dimostrato, ed è facile assicurarsene immediatamente, che

$$\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{rr'} = PQ \\ 2\sqrt{r'r''} = RQ' \\ 2\sqrt{r''r} = P'R \end{array}\right\} \quad (E)$$

Da un' altra parte è facile vedere, che

$$\left.\begin{array}{l} d + R - p = AO + OA'' - AB' = A'''A'' \\ d' + R - p' = BO + OB'' - BA' = B'''B'' \\ d'' + R - p'' = CO + OC'' - CA' = C'''C'' \end{array}\right\} \quad (F)$$

Donde sègue, che le equazioni (D) riducansi a queste

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{PQ} = \mathrm{C'''C''} \\ \mathrm{RQ'} = \mathrm{A'''A''} \\ \mathrm{R'P'} = \mathrm{B'''B''} \end{array}\right\} \quad (G)$$

le quali presentano un teorema rimarchevolissimo.

Poniamo per abbreviare

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A'''A''} = d + \mathrm{R} - p = a \\ \mathrm{B'''B''} = d' + \mathrm{R} - p' = a' \\ \mathrm{C'''C''} = d'' + \mathrm{R} - p'' = a'' \end{array}\right\} \text{d'onde} \left\{\begin{array}{l} 2\sqrt{r''r'} = a \\ 2\sqrt{r''r} = a' \\ 2\sqrt{r\,r'} = a'' \end{array}\right\} \quad (H)$$

Prendendo il prodotto di queste ultime equazioni si ha

$$2r \cdot 2r' \cdot 2r'' = aa'a''$$

cioè: *Il parallelepipedo formato da' tre diametri de' tre cerchi cercati è uguale al parallelepipedo formato dalle tre note lunghezze RQ', $R'P'$, PQ* [17].

Se al contrario dividasi successivamente per ciascuna delle equazioni (H) il prodotto delle altre due, verrà

$$r = \frac{a'a''}{2a}, \quad r' = \frac{a''a}{2a'}, \quad r'' = \frac{aa'}{2a''} \qquad (K)$$

valori incomparabilmente più semplici, e forse altrettanto facili a costruirsi di quelli del Malfatti; poichè le lunghezze a, a', a'' sono date immediatamente dalla costruzione della figura [18].

---

[17] Una tal verità è perfettamente oziosa per la soluzione del problema in quistione.

[18] Tutto l' artifizio producente questa incomparabile semplicità consiste, in un' abbreviazione simbolica di somme e sottrazioni di quantità, che per l' effettiva costruzione bisognerebbe poi sempre eseguire; e però senza il *forse* concediamo volentieri al sig. Tédenat, che esse sieno altrettanto facili a co-

Se suppongansi ammesse le equazioni (G), o ch' è lo stesso le equazioni (D); le equazioni (C) del problema diverranno le (B): e sottraendo successivamente ciascuna di queste ultime dalla somma delle altre due, se ne dedurranno le formole (A) del Malfatti. Quindi il problema non sarà per tal modo che di primo grado [59].

---

struirsi, che le espressioni del Malfatti. Solamente avremmo ragione di richiedergli, perchè tanto calcolo per ritornare a quello stesso, che noi abbiamo mostrato rilevarsi evidentemente dalle formole del Malfatti, dalle quali egli parte per pervenire a queste altre da lui adottate. Sicchè a noi pare che le sue ricerche nulla abbiano aggiunto, che potesse contribuire ad una diretta soluzione del problema: nè il teorema compreso in queste formole, e da noi enunciato nella nota 32 alla soluzione del Malfatti può considerarsi altrimenti, che come una trasformazione della quistione proposta in altra egualmente difficile: nè esso pur dovrebbesi al sig. Tédenat attribuire, ritrovandosi simbolicamente con chiarezza espresso nella soluzione del Malfatti, e dal medesimo dimostrato.

[59] Mi spiace doverlo dire, che questa conseguenza, che spesso trovo ripetuta nelle soluzioni di problemi geometrici eseguite con l'analisi algebrica pura, sia affatto erronea, e mostri quanto poco siesi, da coloro che così ragionano meditato sulla natura de' problemi, ch' è indestruttibile dalle algebriche evoluzioni. Il problema è di secondo grado, e tale il dimostra nelle formole del Malfatti il radicale quadratico che vi è compreso; tale le soluzioni geometriche di esso date: nè certamente la sua natura vien distrutta dall' arbitrio dell' analista, che vi considera per queste un solo segno, e ne elude la forma radicale per mezzo di algebriche trasformazioni. Secondo costoro sarebbe più ragionevole disprezzare le radici immaginarie; e però il problema della duplicazione del cubo risulterebbe del primo grado: ed essi avrebbero per tal modo fatta finalmente la causa de' *duplicatori*. E ricordiamo ancora ad essi, che il Newton, nel ridurre la costruzione del problema del cerchio che ne toccasse tre altri, all' intersezione di due rette, non però disse, che tal problema erasi abbassato al primo grado: ed il nostro Fergola, ch' era saggio ed avveduto, pria di esibire le soluzioni di un gran numero di problemi solidi, ipersolidi, e trascendenti a guisa di *piani*, mostrando col fatto il convenevole uso, che può farsi de'luoghi alla linea ed alla superficie

Si vede dunque quanto la soluzione di questo problema diverrebbe facile, se si potesse dimostrare a priori, che le rette $A'''A''$, $B'''B''$, $C'''C''$ sieno respettivamente uguali alle rette RQ', $R'P'$, PQ, o semplicemente che $RQ' = A'''A''$; ed è in questo punto capitale che io ho creduto dover richiamare l'attenzione de' vostri lettori [40].

Si potrebbe pervenire ad assicurarsi dell'esattezza de' valori, che ho assegnati ad r, r', r'', ponendo

$$2\sqrt{rr'} = \lambda''(R + d'' - p'')$$
$$2\sqrt{r'r''} = \lambda\ (R + d\ - p\ )$$
$$2\sqrt{r''r} = \lambda'\ (R + d' - p')$$

e provando con la sostituzione nelle equazioni del problema, che debbasi avere $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 1$. Ma oltre che questa verità non può rendersi evidente che con un calcolo assai prolisso, rimarrebbe sempre a sapere ciò che ha potuto condurre a stabilire le equazioni di quì sopra, in modo che non farebbe che riprodurre, sotto altra forma la stessa verifica da voi presentata nella vostra raccolta.

Io non aggiungerò, che una parola: dopo i valori quì sopra assegnati ad r, r', r'', si ha

$$\frac{r'}{r} = \frac{a^2}{a'^2}, \quad \frac{r''}{r} = \frac{a^2}{a''^2}$$

ma nella vostra verifica avete fatto

$$r' = rx'^2, \quad r'' = rx''^2.$$

---

in elegantemente risolverli, manifestamente si espresse dicendo, che que' problemi *nulla perdendo di lor natura, risolvevansi a guisa di problemi piani*. (Veg. l'introduzione all' *opusc. IX. della Raccolta di sua Scuola*).

[40] Il sig. Tédenat dirigeva, come si è detto, queste sue ricerche a' compilatori degli *Annali delle Matematiche*.

d' onde

$$\frac{r'}{r} = x', \quad \frac{r''}{r} = x''$$

dunque

$$x' = \frac{a}{a'} = \frac{R + d - p}{R + d' - p'}, \quad x'' = \frac{a}{a''} = \frac{R + d - p}{R + d'' - p''}$$

ciò che dà

$$\frac{x'}{x''} = \frac{R + d'' - p''}{R + d' - p'}$$

Ma in vista de' valori che voi avete trovati per x', x'' nel luogo accennato, si ha

$$\frac{x'}{x''} = \frac{d''}{d'} \times \frac{c'' - d + d'}{c' - d + d''}$$

dunque

$$d'(c' - d + d'')(R + d'' + p'') = d''(c'' - d + d')(R + d' - p')$$

E permutando convenevolmente gli apici, si avran dunque fra i dati del problema le relazioni seguenti

$$d\,(c - d'' + d')(R + d' - p') = d'(c' - d'' + d)(R + d - p)$$
$$d'(c'' - d' + d'')(R + d'' - p'') = d''(c'' - d + d')(R + d' - p')$$
$$d''(c'' - d' + d)(R + d - p) = d\,(c - d' + d'')(R + d' - p'')$$

relazioni, che debbono esser facili a verificare.

NUM. VI.

Ricerche sullo stesso problema del prof. Lechmütz di Berlino (*indic. a pag.* 44.)

(*indic. a pag.* 44.)

Sieno A, B, C i tre vertici di un triangolo qualunque, sia O il centro del cerchio iscritto, il cui raggio noi prendiamo per unità.

Da questo centro sieno abbassate respettivamente su i lati BC, CA, AB le perpendicolari $OA' = OB' = OC' = 1$, e sieno di più menate dall' istesso punto a' vertici le rette OA, OB, OC.

Si facciano

$$ang.\, AOB' = ang.\, AOC' = \alpha$$
$$ang.\, BOC' = ang.\, BOA' = \beta$$
$$ang.\, COA' = ang.\, COB' = \gamma$$

Avremo

$$AB' = AC' = tang.\alpha \quad , \quad OA = sec.\,\alpha$$
$$BC' = BA' = tang.\beta \quad , \quad OB = sec.\,\beta$$
$$CA' = CB' = tang.\gamma \quad , \quad OC = sec.\,\gamma$$

Di più, poichè $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$ equivale a 4 angoli retti avremo

$$tang.\gamma = -\,tang.\,(\alpha + \beta) = -\,\frac{tang.\,\alpha + tang.\beta}{1 - tang.\,\alpha\; tang.\beta}$$

e liberando dal denominatore, ed ordinando

$$tang.\alpha + tang.\beta + tang.\gamma = tang.\alpha.tang.\beta.\; tang.\gamma.$$

Trattandosi dunque d' iscrivere in un triangolo tre cerchi tali, che ciascun di essi tocchi i due altri, ed i lati del triangolo, è chiaro, che i centri di questi cerchi dovranno trovarsi sulle rette OA, OB, OC, che bisecano i suoi angoli. Sieno respettivamente X, Y, Z questi centri, ed x, y, z i raggi, che vi corrispondono.

Se projettinsi ortogonalmente i centri X, Y sul lato AB =

$AC' + BC' = tang.\alpha + tang.\beta$, le loro projezioni divideranno questo lato in tre segmenti; di cui gli estremi saranno evidentemente $x\ tang.\alpha$, $y\ tang.\beta$. Quanto al segmento medio, egli non sarà altra cosa che la projezione della distanza de' centri $XY = x + y$, e sarà conseguentemente

$$\sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2} = 2\sqrt{xy}$$

Eguagliando dunque la somma di queste tre parti alla prima espressione del lato AB, si avrà

$$x\ tang.\alpha + 2\sqrt{xy} + y\ tang.\beta = tang.\alpha + tang.\beta$$

La considerazione de' due altri lati darà equazioni analoghe; di tal che, facendo per brevità

$$tang.\alpha = a$$
$$tang.\beta = b$$
$$tang.\gamma = c$$

tutto si troverà ridotto a risolvere rapporto ad x, y, le tre equazioni

$$ax + 2\sqrt{xy} + by = a + b \qquad (1)$$
$$by + 2\sqrt{yz} + cz = b + c \qquad (2)$$
$$cz + 2\sqrt{zx} + ax = c + a \qquad (3)$$

colla condizione

$$a + b + c = abc \qquad (4)$$

Moltiplicando in croce le equazioni (2, 3), e riducendo, si ha

$$(b+c)(ax + 2\sqrt{xz}) - (a+c)(by + 2\sqrt{yz}) = c(a-b)z$$

ma l' equazione (4) dà

$$c = -\frac{a+b}{ab-1}$$

d' onde si ha

$$b + c = \frac{a(1 + b^2)}{ab - 1} \quad , \quad a + c = \frac{b(1 + a^2)}{ab - 1}$$

Sostituendo dunque, e sopprimendo il denominatore comune, si avrà

$$a(1 + b^2)(ax + 2\sqrt{xz}) - b(1 + a^2)(by + 2\sqrt{yz}) = (a^2 - b^2)z$$

ovvero

$$a(1 + b^2)(ax + 2\sqrt{xy}) - b(1 + a^2)(by + 2\sqrt{yz}) = \big((1 + a^2) - (1 + b^2)\big)z$$

o trasponendo i termini

$$(1 + b^2)(a^2x + 2a\sqrt{xz} + z) = (1 + a^2)(b^2y + 2b\sqrt{yz} + z)$$

oppure

$$(1 + b^2)(a\sqrt{x} + \sqrt{z})^2 = (1 + a^2)(b\sqrt{y} + \sqrt{z})^2$$

o estraendo le radici, e dividendo

$$\frac{a\sqrt{x} + \sqrt{z}}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{b\sqrt{y} + \sqrt{z}}{\sqrt{1 + b^2}}$$

Non diamo doppio segno al secondo membro di quest' equazione, poichè abbiamo semplicemente in mira, che i cerchi interiori al triangolo si tocchino esternamente.

Con una semplice permutazione di lettere, si dedurrà

$$\frac{b\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + b^2}} = \frac{c\sqrt{z} + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + c^2}}$$

$$\frac{c\sqrt{z} + \sqrt{y}}{\sqrt{1 + c^2}} = \frac{a\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Sommando queste due ultime, membro con membro, svanirà z, e si avrà

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)\sqrt{x}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)\sqrt{y}$$

ma a causa di

$$c=\frac{a+b}{ab-1}$$

si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{ab-1}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$$

sostituendo dunque, e togliendo i denominatori, si avrà

$$\left(1-ab+\sqrt{1+a^2}-a\sqrt{1+b^2}\right)\sqrt{x}=\left(1-ab+\sqrt{1+b^2}-b\sqrt{1+a^2}\right)\sqrt{y}$$

I coefficienti dei due membri possono inoltre scriversi a questo modo

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})+a\,(1-b-\sqrt{1+b^2})$$

$$(1-b+\sqrt{1+b^2})+b\,(1-a-\sqrt{1+a^2})$$

e considerando che

$$a=\frac{1}{2}\cdot 2a=-\frac{1}{2}\left((1-a)^2-(1+a^2)\right)=-\frac{1}{2}(1-a+\sqrt{1+a^2})(1-a-\sqrt{1+a^2})$$

$$b=\frac{1}{2}\cdot 2b=-\frac{1}{2}\left((1-b)^2-(1+b^2)\right)=-\frac{1}{2}(1-b+\sqrt{1+b^2})(1-b-\sqrt{1+b^2})$$

essi prenderanno questa nuova forma

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})\left(1-\frac{1}{2}(1-a-\sqrt{1+a^2})(1-b-\sqrt{1+b^2})\right)$$

$$(1-b+\sqrt{1+b^2})\left(1-\frac{1}{2}(1-a-\sqrt{1+a^2})(1-b-\sqrt{1+b^2})\right)$$

cioè a dire, ch' essi hanno un fattor comune; sopprimendo dunque questo fattore, l' equazione diverrà semplicemente

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})\sqrt{x}=\left(1-b+\sqrt{1+b^2}\right)\sqrt{y}$$

mettendo dunque per brevità

$$1-a+\sqrt{1+a^2}=A$$
$$1-b+\sqrt{1+b^2}=B$$
$$1-c+\sqrt{1+c^2}=C$$

si dedurrà, con una semplice permutazione di lettere

$$B\sqrt{y}=C\sqrt{z}\quad,\quad C\sqrt{z}=A\sqrt{x}$$

d' onde

$$\sqrt{x}=\frac{C}{A}\sqrt{z}\quad,\quad\sqrt{y}=\frac{C}{B}\sqrt{z}\qquad(5)$$

Ritorniamo ora alle nostre equazioni primitive; se dalla somma delle equazioni (2, 3) ne toglieremo l' equazione (1), essa diverrà

$$cz+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}-\sqrt{xy}=c$$

E mettendo in questa per $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ i loro valori (5), si avrà

$$\left(c+\frac{C}{A}+\frac{C}{B}-\frac{C^2}{AB}\right)z=c$$

ovvero

$$\Big(cAB+C(A+B-C)\Big)z=cAB\qquad(6)$$

Or si ha dai valori di A, B, C

$$cAB=c(1-a)(1-b)+c(1-b)\sqrt{c+a^2}+c(1-a)\sqrt{1+b^2}+c\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$

ovvero rimpiazzando $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ pe'l suo eguale $(ab-1)\sqrt{1+c^2}$

$$cAB=c(1-a)(1-b)+c(1-b)\sqrt{1+a^2}+c(1-a)\sqrt{1+b^2}+c(ab-1)\sqrt{1+c^2}$$

Si avrà

$$A+B-C=1-a-b+c+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+c^2}$$

d' onde, moltiplicando per $C=1-c+\sqrt{1+c^2}$, e rimpiazzando

respettivamente $\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}$, e $\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}$ per $(ac-1)\sqrt{1+b^2}$, e $(bc-1)\sqrt{1+a^2}$

$$C(A+B-C)=-(1-c)(a+b)-2c^2-c(1-b)\sqrt{1+a^2}$$
$$-(a+b-2c)\sqrt{1+c^2}-c(1-a)\sqrt{1+b^2}$$

Dunque sommando, e riducendo

$$cAB+C(A+B-C)=c-a-b+abc-2c^2+(c-a-b+abc)\sqrt{1+c^2}$$

e rimpiazzando per abc il suo equivalente $a+b+c$ si avrà

$$cAB+C(A+B-C)=2c(1-c+\sqrt{1+c^2})=2cC$$

Sostituendo dunque questo valore nell' equazione (6) e sopprimendo il fattore c, essa diverrà

$$2Cz=AB$$

E da una semplice permutazione di lettere, si avrà

$$x=\frac{BC}{2A}\ ,\quad y=\frac{CA}{2B}\ ,\quad z=\frac{AB}{2C}$$

Ciò posto sieno prolungate AO, BO, CO, sinchè incontrino di nuovo la circonferenza del cerchio iscritto in A″, B″, C″, poi da' vertici A, B, C, presi respettivamente per centri, e co' raggi AB′ = AC′, BC′ = BA′, CA′ = CB′ sieno descritti gli archi, che taglino respettivamente AO, BO, CO in A‴, B‴, C‴; avremo così

$$A'''A''=AO+OA''-AB'=OA''-AB'+AO=1-tang.\alpha+sec.\alpha=A$$
$$B'''B''=BO+OB''-BC'=OB''-BC'+BO=1-tang.\beta+sec.\beta=B$$
$$C'''C''=CO+OC''-CA'=OC''-CA'+CO=1-tang.\gamma+sec.\gamma=C$$

fig. 2. Le tre lunghezze A, B, C essendo così determinate, se ne potrà conchiudere, per una costruzione unica, i tre raggi cercati, x, y, z. Per ciò si costruirà un triangolo DEF, i cui tre lati EF, FD, DE sieno respettivamente uguali a queste tre lunghezze;

pe' vertici D, E, F si tirino le rette terminate a' lati opposti in D′, E′, F′, e così dirette, che abbiasi

$$ang.\ \mathrm{FDD'} = ang.\ \mathrm{E}$$
$$ang.\ \mathrm{DEE'} = ang.\ \mathrm{F}$$
$$ang.\ \mathrm{EFF'} = ang.\ \mathrm{D}$$

allora in virtù della proporzionalità de' lati omologhi de' triangoli simili, le lunghezze DD′, EE′, FF′ saranno i diametri de' cerchi cercati, aventi respettivamente i loro centri in X, Y, Z.

Trovate una volta queste espressioni de' raggi de' cerchi, non v' ha cosa più facile, che di sostituirle tali altre incognite quale si vorrà. Prendendo, per esempio, per incognite le distanze de' vertici ne' quali i cerchi cercati toccano i lati del triangolo, queste incognite saranno $x\ tang.\alpha = ax$, $y\ tang.\beta = by$, $z\ tang.\gamma = cx$, e si avrà

$$ax = \frac{aBC}{2A} \quad , \quad by = \frac{bCA}{2B} \quad , \quad cz = \frac{cAB}{2C}$$

Or dietro i valori trovati quì sopra per cAB, e $C(A + B - C)$ si ha

$$cAB = C\left((2c - A + B - C)\right)$$

dunque

$$cz = \frac{cAB}{2C} = \frac{1}{2}\left(2c - (A + B - C)\right)$$

cioè a dire

$$cz = \frac{1}{2}\left(a + b + c - 1 + \sqrt{(1 + c^2)} - \sqrt{(1 + a^2)} - \sqrt{(1 + b^2)}\right)$$

o pure

$$cz = \frac{1}{2}\left(\mathrm{AB'} + \mathrm{BC'} - \mathrm{CA'} - \mathrm{OC'} + \mathrm{OC} - \mathrm{OA} - \mathrm{OB}\right)$$

il che dà esattamente la costruzione del Malfatti.

Se si volesse prendere per incognite le distanze AX, BY, CZ de' vertici a' centri corrispondenti, queste incognite sarebbero respettivamente $x\sqrt{1+a^2}$, $y\sqrt{1+b^2}$, $z\sqrt{1+c^2}$, e si troverebbe, dietro ciò che precede,

$$z\sqrt{1+c^2}=cz\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}=\frac{\sqrt{1+c^2}}{2c}\left(a+b+c-1+\sqrt{1+c^2}-\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}\right)$$

Se finalmente si volesse prendere per incognite le distanze OX, OY, OZ, queste incognite sarebbero respettivamente $(1-x)\sqrt{1+a^2}$, $(1-y)\sqrt{1+b^2}$, $(1-z)\sqrt{1+c^2}$, e si troverebbe, per esempio,

$$(1-z)\sqrt{1+c^2}=(c-cz)\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}=\frac{\sqrt{1+c^2}}{2c}\left(1-a-b+c+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+c^2}\right)^{41}$$

---

41 Nell' opuscolo, in risposta al programma, non guari di tempo pubblicate, a forze riunite, da diversi nostri professori, nel ripertarvisi come da essi rilevate le equazioni, che sopra si sono vedute assegnate dal Lechmütz, per la costruzione da esso esibita, male interpetrando, per imperizia ne' metodi, la riduzione che fa di quelle in altre questo distinto analista, nel caso che le incognite del problema siensi in diverso modo stabilite, si è con franchezza puerile asserito: » Siccome le equazioni da noi assegnate ci danno per mezzo di formole molte » semplici i valori di tutte le quantità che si cercano, possiamo dire che qualun» que soluzione si darà mai del presente problema, si potrà sempre facilmente » dalle nostre equazioni ricavare. Questa proposizione che qualcuno poco ver» sato ne' metodi algebrici potrebbe creder troppo ardita, sarà diversamente » giudicata da coloro che, esercitati nelle soluzioni algebriche de' problemi geo» metrici, conoscono pur troppo, *quali e quante conseguenze possansi dedurre* » *dalle equazioni di un problema*.

Or nel confessando d' intender poco questa loro conchiusione di parole, concediamo volentieri, che da una soluzione algebrica si possa passare ad un'altra,

Variando i segni de' radicali in modo convenevole, e sostituendo al cerchio iscritto propriamente detto ciascuno de' tre altri cerchi, che possono toccare ad un tratto i tre lati del triangolo, si otterranno tutte le soluzioni delle quali il problema può essere suscettivo.

---

stabilendosi diversamente l'incognita, mediante il rapporto geometrico che vi ha tra queste; del che non crediamo che mai alcuno avesse potuto dubitare: ma pure desidereremmo, che essi ponessero in opera il loro genio analitico, in mostrare, come si possa ridurre *facilmente* a quelle equazioni la costruzione, che ora gli esibiremo del Paucker, o l'altra che n'è stata presentata alla nostra Reale Accademia, col motto *Ordinis haec virtus erit*; e che a quest'ora non potrà ad essi essere ignota, trovandosi andar in giro tra socj della classe matematica, tra' quali non mancano loro fautori.

NUM. VII.

Soluzione dello stesso problema del Malfatti, eseguita con l' analisi antica dal distinto geometra sig. Paucker, professore nel ginnasio di Mittau in Curlandia, ed inserita nel tom. I. delle *Memorie presentate all' imperiale accademia di Pietroburgo*, an. 1831 (*indic. a pag.* 45.)

Per non essere infiniti, recheremo solamente la costruzione alla quale un' analisi geometrica ben lunga ha guidato il Paucker nello scioglimento del presente problema; ed indi soggiugneremo l' enunciazione di tutti que' nuovi teoremi che da tale analisi sono derivati, o che egli poi reca, per compiere la composizione del problema.

COSTRUZIONE.

Divisi per metà i tre angoli del dato triangolo, tali secanti concorreranno in uno stesso punto M centro del cerchio iscrittibile nel triangolo; poi ne' triangoli risultanti M*bc*, M*ca*, M*cb* iscrivansi i cerchi D, E, F respettivamente, e sieno *o*, *p*, *q* i contatti di questi cerchi co' lati *bc*, *ca*, *ab*; ed *u*, *v*, *w* le intersezioni delle linee de' centri EF, FD, DE con le secanti M*a*, M*b*, M*c* respettivamente. Uniscansi le rette *ou*, *pv*, *qw*, che concorreranno in un medesimo punto N, e delle quali ciascuna dee toccare i due adjacenti tra i tre cerchi D, E, F. I quadrilateri N*paq*, N*qbo*, N*ocp*, saranno circoscrittibili a de' cerchi. Vi s' iscrivano i cerchi *d*, *e*, *f* respettivamente; questi soddisferanno al problema, cioè saranno tangenti due a due.

Teoremi sviluppati dal sig. Paucker, nel cammino dell' analisi geometrica della sua soluzione.

Supposto fatto quello che cercasi, ne segue, che:

TEOREMA I.

1. *Ciascuna delle tangenti esteriori a due cerchi*, p. e., *kg' è media proporzionale tra i loro diametri kt, g'r.* *fig. 4.*

2. *Ciascuna delle tre tangenti interiori a' cerchi medesimi*, p. e, *mp, è media proporzionale tra i loro raggi dm, fm.*

TEOREMA II.

Se di due cerchi, p.e., *e, f si uniscano i contatti sul lato corrispondente bc, con i contatti sulla circonferenza d; l' intersezione w di queste due rette k' m, hn dovrà trovarsi sulla circonferenza d: siccome l' intersezione x delle rette kl, g'n si troverà sulla circonferenza e — I raggi inoltre dw, ex corrispondenti a quelle intersezioni taglieranno prolungati, ad angolo retto, i lati bc, ca respettivamente.*

TEOREMA III.

La retta wl, che unisce l' intersezione w col contatto l, sarà tangente a' due cerchi f, e, ossia perpendicolare alla retta de' centri fe; e dividerà in due parti uguali nel punto o la tangente esteriore k'h.

Così pure xm, congiungente dell' intersezione x col contatto m, sarà tangente a' due cerchi f, d, ossia perpendicola-

re alla retta de' centri fd, e bisecherà nel punto p la tangente esteriore k g'.

Teorema IV.

La retta wl tangente comune de' cerchi f, e sarà uguale alla w u, distanza perpendicolare del punto w dalla corda de' contatti k'k, sicome x m tangente comune a' cerchi f, d sarà uguale alla x v, distanza perpendicolare del punto x dalla corda de' contatti k'k.

Teorema V.

Si congiunga v l, si distenda fino ad incontrare la w u nel punto y, e si tirino le k y, u l; queste due rette dovranno intersegarsi sulla circonferenza del cerchio f, in un punto γ, cui corrisponde il raggio f γ parallelo alla corda de' contatti k'k.

Così pure le vm, k'z s' intersegheranno sulla circonferenza del cerchio f, in un punto δ, al quale corrisponde il raggio f δ parallelo alla corda de' contatti k'k.

E quindi i raggi f γ, f δ formeranno una linea retta parallela alla corda stessa.

Teorema VI.

I triangoli k g' y, k' h z saranno isosceli, e le linee k y, k' z formeranno co' lati a c, b c angoli uguali tra loro, ed uguali alla quarta parte dell' angolo b c a.

Teorema VII.

Il raggio fl si distenda in ι, fino alla corda de' contatti kk' e si congiunga ιw, che interseghi la retta ky in un punto η. — Il quadrilatero $k\,l\,y\,u$ sarà inscrittibile nel cerchio, il cui centro sarà η: e prolungando la tangente wl comune a' due cerchi f, e, fino ad incontrare nel punto λ il lato $c\,a$, questo punto λ starà per dritto col punto η, e col centro del cerchio f. E la retta $f\eta\lambda$, che passa per essi, sarà perpendicolare alla corda de' contatti $k\,l$.

Così pure staranno in linea retta il centro del cerchio f, il centro ζ del cerchio circoscrittibile al quadrilatero $k'\,m\,z\,v$, che trovasi sulla $k'z$, e l' intersezione μ della tangente $\mu\,x$ comune a' due cerchi f, d, col lato $b\,c$; e la retta $f\zeta\mu$, che passa per essi sarà perpendicolare alla corda de' conatti $K'm$.

Inoltre la retta $v\,m$, prolungata, dovrà passare pel punto η centro del cerchio circoscrittibile al quadrilatero $kl\gamma u$, e del pari la retta $u\,l$ passerà pel punto ζ centro del cerchio circoscrittibile all' altro quadrilatero $k'mzv$.

Teorema VIII.

Conducasi pel vertice c la parallela alla retta ky, la quale incontri la $f\lambda$ in E. Il punto E sarà centro di un cerchio del raggio $E\,p$ tangente le rette $\lambda\,l\,o$, $c\,f$, $c\,a$, e quest' ultima in p.

E così pure, conducendo pel vertice c la parallela alla $k'z$, essa incontrerà la retta $f\mu$ nel punto D, che sarà centro di un cerchio del raggio $D\,o$ tangente le rette $\mu\,m\,p$, $c\,f$, bc, e quest' ultima in o.

TEOREMA IX.

Il cerchio descritto col centro E, e col raggio Ep, toccherà le quattro rette nq, lo, cf, ca, prolungate.

Altri teoremi di cui il Paucker ha bisogno per compiere la composizione del problema, cioè per dimostrare la costruzione esposta di esso.

TEOREMA I.

fig. 5. *Sia l' angolo bca diviso in due parti uguali dalla Mc, e de' cerchi tangenti D, E sieno comunque iscritti negli angoli bcM, Mca; se uniscansi i contatti su' lati colla retta op, che interseghi que' cerchi in x, y; le corde ox, py saranno uguali tra loro.*

TEOREMA II.

Poste le cose stesse del teorema precedente, sieno inoltre o'', p' i contatti di que' cerchi con la segante cM, ed uniscansi i contatti reciproci colle rette op', po''; queste congiungenti saranno uguali tra loro, e concorreranno ad uno stesso punto z della congiungente de' centri DE, il qual punto è la projezione del vertice c su tale congiungente.

Di più, que' cerchi D, E essendo intersegati dalla retta op', ne' punti t, y', e dalla po'' in x', t' respettivamente; la congiungente tt' sarà la loro comune tangente interiore; e le quattro corde ot, p'y', o''x', pt' saranno uguali tra loro.

TEOREMA III.

Poste le cose stesse del teorema I.; le due tangenti or, ps', tirate da ciascun contatto al cerchio opposto, saranno uguali tra loro.

TEOREMA IV.

Premesse le cose stesse del teorema II.; il quadrato di ciascuna delle due tangenti or, ps', tirate dall' un de' contatti al cerchio opposto, sarà uguale al doppio rettangolo delle corde tra' contatti oo'', pp', insieme col quadrato di tt', ovvero di p', o'', tangenti comuni interne de' cerchi D, E.

TEOREMA V.

Poste le cose stesse del teorema II.; il doppio quadrato della congiungente de' contatti reciproci op', ovvero po'', sarà uguale alla somma de' quadrati fatti dalla tangente or, o ps' condotta da un contatto al cerchio opposto, e dalla comune tangente interiore o''p' de' cerchi.

TEOREMA VI.

Poste le cose stesse del teorema II., si tirino a' cerchi opposti, e nell' istesso senso rispetto a' centri, le tangenti or, ps', che si taglino scambievolmente in N; il quadrilatero Nocp sarà circoscrittibile ad un cerchio f tale, che la doppia distanza del vertice dell' angolo c da' punti di contatto di questo cerchio su i lati dell' angolo bca, è eguale alla somma delle tangenti oc, cp diminuita della tangente or, ovvero ps'.

Teorema VII.

Posto ciò, che si è detto nel teorema precedente, sia k il punto ove il cerchio f iscritto nel quadrilatero N o c p tocca il lato c a: se dal vertice c, e nell' istesso senso del lato c a, si prenda un segmento c G uguale alla somma delle tangenti, o c, c p; il rettangolo di c f in G k sarà uguale all' altro delle tangenti, o c, c p.

Teorema VIII.

Premesse le cose stesse del teorema I., da' contatti o, p sieno menate a' cerchi opposti, e nell' istesso senso per rapporto a' centri, le tangenti o r, p s', che s'interseghino scambievolmente in N; nel quadrilatero N o c p sia iscritto il cerchio f, tangente i lati N o, o c, c p, p N, ne' punti l, k', k, m, respettivamente: dico che

1°. *Delle due tangenti l o, m p, quella, che è la più grande sarà uguale alla semisomma delle tangenti o r, o'' p', e l'altra alla semidifferenza delle tangenti medesime.*

2°. *Il rettangolo di queste tangenti l o, m p sarà uguale alla metà del rettangolo delle corde di contingenza o o'', p p'.*

3°. *La somma de' quadrati delle stesse tangenti l o, m p sarà uguale al quadrato della retta o p', ovvero p o'', che congiunge i contatti reciproci*

4°. *Se da' contatti con la segante M c si abbassino le perpendicolari p' ε, o'' ζ su' lati; il segmento k p sarà diviso in ε nella stessa ragione che la tangente c o in k', e 'l segmento k' o sarà diviso in ζ, com' è divisa la c p in k.*

5. *Finalmente la comune tangente interiore t t' a' cerchi D, E passerà per l' intersezione N delle tangenti o r, p s'.*

TEOREMA IX.

Premesse le stesse cose del teor. II.; la distanza de' contatti $o''p'$ sarà divisa armonicamente nel vertice c, e dalla linea de' centri DE; di tal che se w sia l'intersezione della linea de' centri colla segante Mc, la distanza cw sarà la media armonica tra le tangenti oc, cp.

E *ciò vuol dire, che la media proporzionale tra le tangenti oc, cp è anche media proporzionale tra le medie armoniche, ed aritmetiche di queste tangenti oc, cp.*

TEOREMA X.

Nel triangolo abc sia iscritto il cerchio M, che tocchi i lati bc, ca, ab in A, B, C respettivamente; ed i cerchi D, E, F sieno iscritti ne' triangoli Mbc, Mca, Mab, tal che il cerchio D sia tangente alle bc, Mb, Mc ne' punti, o, o', o''; il cerchio E tocchi ca, Mc, Ma, in p, p', p'', il cerchio F tocchi ab, Ma, Mb in q, q', q''. *fig.* 3.

Ciò posto, la tangente menata dal punto o al cerchio E, o dal punto p al cerchio D, sarà uguale ad xq', ovvero ad yq''. La tangente menata dal punto p al cerchio F, o dal punto q al cerchio E, sarà uguale ad yo', o a zo''. E la tangente menata dal punto o al cerchio F, sarà uguale a zp' ovvero ad xp''.

TEOREMA XI.

Nel triangolo abc sia iscritto il cerchio M, e ne' triangoli Mbc, Mca, Mab sieno pure iscritti i cerchi D, E, F,

le di cui linee de' centri ***EF***, ***FD***, ***DE*** *taglino le seganti* $M\,a$, $M\,b$, $M\,c$ *in* u, v, w *se uniscansi le rette* ou, pv, qw, *ciascuna di queste sarà tangente a' due cerchi adjacenti tra i tre* D, E, F.

Permesse questa verità geometriche, ecco la

Dimostrazione della costruzione esibita *a pag.* 88.

fig. 3.

Si son divisi in due parti uguali gli angoli del triangolo abc con le seganti $M\,a$, $M\,b$, $M\,c$, e ne' triangoli $M\,b\,c$, $M\,c\,a$, $M\,a\,b$ si sono iscritti i cerchi D, E, F, tangenti i lati bc, ca, ab ne' punti o, p, q; le linee de' centri EF, FD, DE essendo tagliate dalle seganti $M\,a$, $M\,b$, $M\,c$ in u, v, w, si son congiunte le rette ou, pv, qw.

Ciò posto, il teorema precedente fa conoscere, che la retta ou debba esser tangente a'cerchi E, F, la retta pv a' cerchi F, D, e la retta qw a' cerchi D, E.

Quindi, poichè le rette ou, pv son tangenti a' cerchi E, D respettivamente, e qw è la comune tangente interiore di questi cerchi, si rileverà dal teorema VIII., che qw debba passare per l'intersezione delle ou, pv; e che per conseguenza le tre rette ou, pv, qw debbano intersegarsi scambievolmente in uno stesso punto N.

Di più, pel teorema VI. i tre quadrilateri $Nocp$, $Npaq$, $Nqbo$ saranno circoscrittibili a' cerchi.

Rimane dunque a provarsi, che se in questi quadrilateri s' iscrivano i cerchi f, d, e, ciascuna delle rette ou, pv, qw sia tangente in un medesimo punto a due de' cerchi adjacenti, tra i tre cerchi d, e, f.

A tal effetto, supponiamo, che il cerchio D tocchi le se-

ganti Mb, Mc in o', o'', il cerchio E le seganti Mc, Ma in p', p'', il cerchio F le seganti Ma, Mb in q', q'', il cerchio M i lati bc, ca, ab, in A, B, C; e 'l raggio di questo cerchio M sia designato dalla lettera ρ.

Se conducasi la tangente or al cerchio E; ed il cerchio f iscritto nel quadrilatero $Nocp$ tocchi i lati No, Np in l, m, si avrà pel teorema VIII.

$$2lo = or + o''p'$$
$$2mp = or - o''p'$$

e pel teorema X.

$$or = \rho + Mq'$$
$$2Mq' = Ma + Mb - ab$$
$$2o''p' = Ma + bc - (Mb + ca)$$
$$2Mq' + 2o''p' = 2Ma - (ca + ab - bc)$$
$$2Mq' - 2o''p' = 2Mb - (ab + bc - ca)$$
$$2Ba = ca + ab - bc$$
$$2Cb = ab + bc - ca$$
$$Mq' + o''p' = Ma - Ba$$
$$Mq' - o''p' = Mb - Cb$$

donde si avranno le equazioni

$$1 \quad \begin{cases} 2lo = \rho + Ma - Ba \\ 2mp = \rho + Mb - Cb \end{cases}$$

Similmente, se conducasi la tangente ps al cerchio F, e che il cerchio d iscritto nel quadrilatero $Npaq$ tocchi i lati Np, Nq in m', n, si perverrà ad ottenere le equazioni.

$$2 \quad \begin{cases} 2m'p = \rho + Mb - Cb \\ 2nq = \rho + Mc - Ac \end{cases}$$

E conducendo la tangente qt al cerchio D, ed il cerchio e iscrit-

to nel quadrilatero $N q b o$ toccando i lati $N q$, No in n', l'; si dedurranno le equazioni

$$3 \begin{cases} 2\,n'q = \rho + Mc - Ac \\ 2\,l'o = \rho + Ma - Ba \end{cases}$$

E perciò si avranno finalmente le equazioni

$$4 \begin{cases} 2\,lo = 2\,l'o = \rho + Ma - Ba \\ 2\,mp = 2\,m'p = \rho + Mb - Cb \\ 2\,np = 2\,n'q = \rho + Mc - Ac \end{cases}$$

Dalle quali si ravvisa, che i contatti l, l', si confondono tra loro, al pari degli altri contatti m, m', non che i rimanenti n, n'. — *C. B. D.*

Dopo ciò egli così conchiude : » I valori trovati delle doppie tangenti, conducono immediatamente ad un teorema dovuto » al sig. Tédenat [41] «, che enuncia, e poi dimostra facilmente, rimettendosi a' suoi precedenti teoremi. Ed in seguito ne deduce la soluzione del problema in quistione, come immediata conseguenza di tal teorema.

Procedendo innanzi, dimostrando altri teoremi da lui rilevati, fa vedere la corrispondenza de' suoi risultamenti con quelli del Malfatti, e passa poi a risolvere il seguente

PROBLEMA I.

fig. 3. *Un angolo dato b c a sia diviso per metà dalla retta Mc, e ne' semiangoli b c M, Mc a sieno iscritti comunque i cerchi tangenti D, E, i quali tocchino i lati b c, ca in o, p; si vuole inclinare tra' lati di quell' angolo la retta ba in modo, che*

[41] Veggasi sul proposito la nota n. 31.

divisi per metà gli angoli in a , b , con le seganti Ma , Mb , queste risultino tangenti a' cerchi E , D.

La cui analisi geometrica il conduce alla seguente

Costruzione.

Si tiri dal contatto o la tangente or al cerchio E, e tagliata sulla retta che biseca l' angolo bca , la cm'' uguale alla semisomma delle tangenti or , oc , cp, si elevi ad essa da m'' la perpendicolare $m''n''$, che incontri la cE in n''; indi tagliate le $m''T$, $m''z$ uguali alla $m''n''$, prendasi la $n''B$ uguale alla $n''T$, o $n''z$, e sopra cB s' innalzi la perpendicolare , che tagli la segante cm'' in M.

Ovvero congiungasi Bz , e dal punto n'' si tiri la perpendicolare alla Bz , che taglia la segante cM in M.

Oppure al punto c della cm'' si costituisca l'angolo $m''c\delta$ semiretto , e si elevi la perpendicolare alla cn'' , che incontri la retta $c\delta$ in δ, dal qual punto si abbassi la perpendicolare alla cm'', che l' incontra in M .

Dal punto M così rinvenuto tirinsi le rette $Mp''a$, $Mo'b$ tangenti a' cerchi E , D , che incontrino i lati dell' angolo dato in a , b ; si sarà in tal modo soddisfatto al problema.

PROBLEMA II.

fig. 3. *Iscritti in un dato triangolo* abc, *i tre cerchi tangenti* D, E, F; *indicare le espressioni trigonometriche delle tangenti, e de' diametri.*

Da' precedenti teoremi si deducono, senz' altro ragionamento, o calcolo, per le tangenti, le seguenti espressioni

$$2\,lo = hk' = Rx = \rho.\sqrt{2}.\frac{\text{sen.}\left(45 + \frac{a}{4}\right)}{\cos.\frac{a}{4}}$$

$$2\,mp = kg' = Sy = \rho.\sqrt{2}.\frac{\text{sen.}\left(45 + \frac{b}{4}\right)}{\cos.\frac{b}{4}}$$

$$2\,nq = gh' = Tz = \rho.\sqrt{2}.\frac{\text{sen.}\left(45 + \frac{c}{4}\right)}{\cos.\frac{c}{4}}$$

E pe' diametri le altre

$$2\,dg = \frac{Sy.Tz}{Rx} = \rho\sqrt{2}.\frac{\text{sen.}\left(45 + \frac{b}{4}\right)\text{sen.}\left(45 + \frac{e}{4}\right)\cos.\frac{a}{4}}{\cos.\frac{b}{4}.\cos.\frac{c}{4}.\text{sen.}\left(45 + \frac{a}{4}\right)}$$

$$2\,eh = \frac{Tz.Rx}{Sy} = \rho\sqrt{2}.\frac{\text{sen.}\left(45 + \frac{c}{4}\right)\text{sen.}\left(45 + \frac{a}{4}\right)\cos.\frac{b}{4}}{\cos.\frac{c}{4}.\cos.\frac{a}{4}.\text{sen.}\left(45 + \frac{b}{4}\right)}$$

$$2\,fh = \frac{Rx.Sy}{Tz} = \rho\sqrt{2}.\frac{\text{sen.}\left(45 + \frac{a}{4}\right)\text{sen.}\left(45 + \frac{b}{4}\right)\cos.\frac{c}{4}}{\cos.\frac{a}{4}.\cos.\frac{b}{4}.\text{sen.}\left(45 + \frac{c}{4}\right)}$$

Prosegue dopo ciò le sue ricerche teorematiche relative allo stesso argomento delle *Tazioni*; le quali mostrano abbastanza la fecondità del suo ingegno, e del metodo da lui adoperato: ma noi tralasciamo di quì recarle, per non essere troppo lunghi, nè tampoco stimandole necessarie allo scopo cui miriamo; rimettendo chi desidera conoscerle all' eccellente lavoro originale, e degno di tutta la considerazione de' geometri, del sig. Paucker; e solamente stimiamo di non dover omettere di recar quì il seguente altro teorema segnato col num. 40.

TEOREMA.

Sia M il centro del cerchio iscrittibile nel triangolo a b e, in cui sieno pur iscritti tre altri cerchi, de' quali uno soltanto f sia toccato dagli altri due in l, m; e sieno tirate le tangenti comuni interiori l o, mp, che incontrino i lati in o, p, e congiunte le rette fo, fp. Se da' punti f, o si abbassino sulla segante Mb le perpendicolari fs, o t, e da' punti f, p sull' altra segante Ma le perpendicolari f r, pu; le parti t s, r u interposte tra queste perpendicolari saranno tra loro uguali. *fig. 6*

Dopo averlo dimostrato, passa, in un corollario, ad esprimere in forma simbolica trigonometrica i valori delle *ru*, *st*, che sono i quì appresso

$$ru = fk \text{ sen. } \frac{a}{2} + pk \text{ . cos. } \frac{a}{2} = \sqrt{fk}\,(\sqrt{fk}\text{.sen.}\frac{a}{2} + \sqrt{dg}\text{.cos.}\frac{a}{2}$$

$$st = fk' \text{ sen. } \frac{b}{2} + ok' \text{ . cos. } \frac{b}{2} = \sqrt{fk}\,(\sqrt{fk}\text{.sen.}\frac{b}{2} + \sqrt{eh}\text{.cos.}\frac{b}{2})$$

E poichè *ru* si è dimostrata uguale ad *s t*, ne risulta l' equazione

$$\sqrt{fk}.\text{sen}.\frac{a}{2}+\sqrt{dg}.\cos.\frac{a}{2}=\sqrt{fk}.\text{sen}.\frac{b}{2}+\sqrt{eh}.\cos.\frac{b}{2}$$

E poi così conchiude : « Questa equazione sviluppata in un
» modo differente da due geometri di Berlino, sig. Crelle e Lechmutz,
» gli ha condotti alla soluzione trigonometrica , ch' essi hanno pub-
» blicata a tal proposito , e che io passo a presentare con le con-
» venienti modificazioni .

Or noi avendo già di sopra recata la soluzione di questi due distinti professori , ci crediamo in dovere di riportare ancor quella del Paucker , che con ingenuità propria di chi , avendo vero merito, non va usurpando le altrui cose , la dà come derivata da quelle de' matematici di Berlino, non ostante , che grandissima sia la differenza che v' ha tra esse , nè facile a ravvisarsi da chiunque. E ciò potrà servire di convenevole avvertimento a que' nostri professori, i quali non avrebbero certamente dovuto , per piccoli ed insignificanti cambiamenti , attribuirsi senza scrupolo ciò , che manifestamente appartenevasi al Lechmütz , come ognuno poteva rilevarlo dagli *Annali* del Gergonne [1]. Ma per essi non è già la prima volta che abbiano tenuto tal procedimento , come si è di sopra accennato , relativamente alla soluzione del Gergonne , del problema di una curva conica e tre punti dati .

---

[1] Si riscontri su tal proposito la nota (*s'*) al programma.

Soluzione trigonometrica del problema.

Il cerchio d essendo toccato da' cerchi e, f, in n, m, se tirinsi le tangenti comuni interiori nq, mp, il teorema precedente dà l'equazione. *fig. 4.*

$$1.)\quad dg\,.\,\text{sen.}\frac{b}{2} + nq\,.\,\text{cos.}\frac{b}{2} = dg\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2} + mp\,.\,\text{cos.}\frac{c}{2}$$

Il cerchio e essendo toccato da' cerchi f, d in l, n, se tirisi anche la tangente comune interiore lo, si avrà, pel medesimo teorema

$$2.)\quad ch\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2} + lo\,.\,\text{cos.}\frac{c}{2} = eh\,.\,\text{sen.}\frac{a}{2} + nq\,.\,\text{cos.}\frac{a}{2}$$

Moltiplicando queste equazioni per lo, mp respettivamente, ed avendosi per gli altri teoremi già riportati

$$3.)\qquad dg\,.\,lo = mp\,.\,nq \quad , \quad ch\,.\,mp = nq\,.\,lo$$

si avrà

$$mp.np.\text{sen.}\frac{b}{2} + nq.lo.\text{cos.}\frac{b}{2} = mp\,.\,nq\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2} + lo\,.\,mp\,.\,\text{cos.}\frac{c}{2}$$

$$nq\,.\,lo.\text{sen.}\frac{c}{2} + lo.mp.\text{cos.}\frac{c}{2} = nq\,.\,lo\,.\,\text{sen.}\frac{a}{2} + mp.\,nq\,.\,\text{cos.}\frac{a}{2}$$

Sommando queste equazioni, e riducendo si otterrà

$$4.)\quad lo.(\text{sen.}\frac{c}{2} + \text{cos.}\frac{b}{2} - \text{sen.}\frac{a}{2}) = mp.(\text{sen.}\frac{c}{2} + \text{cos.}\frac{a}{2} - \text{sen.}\frac{b}{2})$$

Per ridurre i coefficienti si avrà da prima

$$\text{cos.}\frac{b}{2} - \text{sen}\,\frac{a}{2} = 2\,\text{sen.}(45 - \frac{a+b}{4})\,\text{sen.}(45 - \frac{a-b}{4}) = 2\,\text{sen.}(45 - \frac{a-b}{4})$$

$$\text{cos.}\frac{a}{2} - \text{sen}\,\frac{b}{2} = 2\,\text{sen.}(45 - \frac{a+b}{4})\,\text{sen.}(45 + \frac{a-b}{4}) = 2\,\text{sen.}(45 - \frac{a-b}{4})$$

e poichè

$$\text{sen.}\frac{c}{2} = 2\,\text{sen.}\frac{c}{4}\,.\,\text{cos.}\frac{c}{4}$$

si avrà

$$\text{sen.}\frac{c}{2} + \cos.\frac{b}{2} - \text{sen.}\frac{a}{2} = 2\,\text{sen.}\frac{c}{4}\left(\cos.\frac{c}{4} + \text{sen.}\left(45 - \frac{a-b}{4}\right)\right)$$

$$\text{sen.}\frac{c}{2} + \cos.\frac{a}{2} - \text{sen.}\frac{b}{2} = 2\,\text{sen.}\frac{c}{4}\left(\cos.\frac{c}{4} + \text{sen.}\left(45 + \frac{a-b}{4}\right)\right)$$

ossia

$$\text{sen.}\frac{c}{2} + \cos.\frac{b}{2} - \text{sen.}\frac{a}{2} = 4.\,\text{sen.}\frac{c}{4}\,.\,\cos.\frac{a}{4}\,.\,\text{sen.}(45 + \frac{b}{4})$$

$$\text{sen.}\frac{c}{2} + \cos.\frac{a}{2} - \text{sen.}\frac{b}{2} = 4.\,\text{sen.}\frac{c}{4}\,.\,\cos\frac{b}{4}\,.\,\text{sen.}(45 + \frac{a}{4})$$

Sostituendo nell' equazione (4), e riducendo, si ottiene

$$5 \left\{ \begin{array}{l} lo = mp\,.\dfrac{\text{sen.}\,(45 + \frac{a}{4})\,.\,\cos.\frac{b}{4}}{\cos.\frac{a}{4}\,.\,\text{sen.}(45 + \frac{b}{4})} \\ \text{ossia} \\ nq = dg\,.\dfrac{\text{sen.}\,(45 + \frac{a}{4})\,.\,\cos\frac{b}{4}}{\cos.\frac{a}{4}\,.\,\text{sen.}(45 + \frac{a}{4})} \end{array} \right.$$

e per un analogo procedimento

$$6 \left\{ \; mp = dg\,.\dfrac{\text{sen.}\,(45 + \frac{a}{4})\,.\,\cos.\frac{c}{4}}{\cos.\frac{a}{4}\,.\,\text{sen.}\,(45 + \frac{c}{4})} \right.$$

Moltiplicando le equazioni 5, 6, si avrà

$$7 \left\{ \; lo = dg\,.\dfrac{\text{sen.}^2(45 + \frac{a}{4}).\,\cos.\frac{b}{4}\,.\,\cos.\frac{c}{4}}{\cos.^2\frac{a}{4}\,.\,\text{sen.}(45 + \frac{b}{4})\,\text{sen.}(45 + \frac{c}{4})} \right.$$

Il cerchio M, del raggio ρ, toccando i lati del triangolo in A, B, C, dà

$$2 . Ba = 2 \rho . \cot. \frac{a}{2} = ca + ab - bc$$

$$ca = ck + ag + 2mp$$
$$ab = ag + bh + 2nq$$
$$bc = bh + ck + 2lo$$
$$ca + ab - bc = 2ag + 2mp + 2nq - 2lo$$

dunque

$$8) \qquad \rho . \cot. \frac{a}{2} = dg . \cot. \frac{a}{2} + mp + nq - lo$$

Sostituendo i valori di mp, nq, lo, moltiplicando per $\text{tang.} \frac{a}{2}$, ed osservando che

$$\text{tang.} \frac{a}{2} . \cot. \frac{a}{2} = 1 \quad , \quad \text{tang.} \frac{a}{2} \frac{\text{sen.} \left(45 + \frac{a}{4}\right)}{\cos. \frac{a}{4}} = \frac{\text{sen.} \frac{a}{4}}{\cos. \left(45 + \frac{a}{4}\right)}$$

si perviene all' equazione finale

$$9) \left\{ \rho = dg + dg . \text{sen.} \frac{a}{4} \frac{\left[\text{sen.}\left(45 + \frac{c}{4}\right) \cos. \frac{a}{4} . \cos. \frac{b}{4} + \text{sen} \left(45 + \frac{b}{4}\right) \cos. \frac{c}{4} \cos. \frac{a}{4} - \text{sen.} \left(45 + \frac{a}{4}\right) \cos. \frac{b}{4} \cos. \frac{c}{4} \right]}{\cos. \frac{a}{4} . \cos. \left(45 + \frac{a}{4}\right) . \text{sen.} \left(45 + \frac{b}{4}\right) \text{sen.} \left(45 + \frac{c}{4}\right)} \right.$$

Per ridurla si farà uso delle formole

$$2 \cos. \alpha . \cos. \beta = \cos. (\alpha + \beta) + \cos. (\alpha - \beta)$$
$$2 \text{ sen.} \alpha . \cos. \beta = \text{sen.} (\alpha + \beta) + \text{sen} (\alpha - \beta)$$

che danno il mezzo di sviluppare il prodotto di tre seni, o coseni

$$4 . \text{sen.} m . \cos. n . \cos p = \left\{ \begin{array}{l} \text{sen.} (m + n + p) + \text{sen} (m + n - p) \\ + \text{sen.} (m - n + p) + \text{sen} (m - n - p) \end{array} \right\}$$

O

Facendovi le convenienti sostituzioni, si trova

$$
10\left\{
\begin{array}{l}
4.\text{sen.}(45+\frac{c}{4})\cos.\frac{a}{4}\cos.\frac{b}{4}=1+\cos.\frac{a}{2}+\cos.\frac{b}{2}+\text{sen.}\frac{c}{2}\\
4.\text{sen.}(45+\frac{b}{4})\cos.\frac{c}{4}\cos.\frac{a}{4}=1+\cos.\frac{c}{2}+\cos.\frac{a}{2}+\text{sen.}\frac{b}{2}\\
4.\text{sen.}(45+\frac{a}{4})\cos.\frac{b}{4}\cos.\frac{c}{4}=1+\cos.\frac{b}{2}+\cos.\frac{c}{2}+\text{sen.}\frac{a}{2}\\
4.\cos.(45+\frac{a}{4})\text{sen.}(45+\frac{b}{4})\text{sen.}(45+\frac{c}{4})=1-\text{sen.}\frac{a}{2}+\text{sen.}\frac{b}{2}+\text{sen.}\frac{c}{2}\\
4.\cos.(45+\frac{a}{4})\cos.\frac{b}{4}\cos.\frac{c}{4}=\cos.\frac{a}{2}+\cos.\frac{b}{2}+\text{sen.}\frac{c}{2}
\end{array}
\right.
$$

L' equazione 9 diverrà dunque

$$\rho=dg+dg.\frac{\text{sen.}\frac{a}{4}(1+2\cos.\frac{a}{2}-\text{sen.}\frac{a}{2}+\text{sen.}\frac{b}{2}+\text{sen.}\frac{c}{2})}{\cos.\frac{a}{4}(1-\text{sen.}\frac{a}{2}+\text{sen.}\frac{b}{2}+\text{sen.}\frac{c}{2})}$$

$$\rho=dg.\frac{2\,\text{sen.}\frac{a}{4}\,.\cos.\frac{a}{2}+(\text{sen.}\frac{a}{4}+\cos.\frac{a}{4})\,(1-\text{sen.}\frac{a}{2}+\text{sen.}\frac{b}{2}+\text{sen.}\frac{c}{2})}{\cos.\frac{a}{4}(1-\text{sen.}\frac{a}{2}+\text{sen.}\frac{b}{2}+\text{sen}\,\frac{c}{2})}$$

Or

$$2\,\text{sen.}\frac{a}{4}\,.\cos.\frac{a}{2}=2\,\text{sen.}\frac{a}{4}(\cos.\frac{a}{4}+\text{sen.}\frac{a}{4})\,(\cos.\frac{a}{4}-\text{sin.}\frac{a}{4})$$

$$2\,\text{sen.}\frac{a}{4}\,.\cos.\frac{a}{2}=(\cos.\frac{a}{4}+\text{sen.}\frac{a}{4}).\,(2\,\text{sen.}\frac{a}{4}\cos.\frac{a}{4}-2\,\text{sen.}^2\frac{a}{4})$$

$$2\,\text{sen.}\frac{a}{4}\,.\cos.\frac{a}{4}=(\cos.\frac{a}{4}+\text{sen.}\frac{a}{4}).\,(2\,\text{sen.}\frac{a}{2}+\cos.\frac{a}{4}-1)$$

Dunque

$$p = dg \cdot \frac{(\cos.\frac{a}{4} + \sin.\frac{a}{4})\ (\cos.\frac{a}{2} + \text{sen}.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2})}{\cos.\frac{a}{4}(1 - \text{sen}.\frac{a}{2} + \text{sen}.\frac{b}{2} + \text{sen}.\frac{c}{2})}$$

$$p = dg \cdot \frac{\sqrt{2}\ \text{sen}.(45 + \frac{a}{5}) \cdot 4 \cdot \cos.(45 + \frac{a}{4}) \cdot \cos.\frac{b}{4} \cdot \cos.\frac{c}{4}}{\cos.\frac{a}{4} \cdot 4 \cdot \cos.(45 + \frac{a}{4}) \cdot \text{sen}.(45 + \frac{b}{4}) \cdot \text{sen}.(45 + \frac{c}{4})}$$

$$\rho = dg \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\text{sen}.(45 + \frac{a}{4}) \cdot \cos.\frac{b}{4} \cos.\frac{c}{4}}{\cos.\frac{a}{4} \text{sen}.(45 + \frac{b}{4}) \cdot \text{sen}\ (45 + \frac{c}{4})}$$

Dal che si ha, rovesciando,

$$11 \quad \begin{cases} dg = \rho \cdot \dfrac{\text{sen}.(45 + \frac{b}{4}) \cdot \text{sen}\ (45 + \frac{c}{4}) \cdot \cos.\frac{a}{4}}{\sqrt{2} \cdot \cos.\frac{b}{4} \cdot \cos.\frac{c}{4} \cdot \text{sen}.(45 + \frac{a}{4})} \\[2ex] eh = \rho \cdot \dfrac{\text{sen}.(45 + \frac{c}{4}) \cdot \text{sen}\ (45 + \frac{a}{4}) \cdot \cos.\frac{b}{4}}{\sqrt{2} \cdot \cos\frac{c}{4} \cdot \cos.\frac{a}{4} \cdot \text{sen}.(45 + \frac{b}{4})} \\[2ex] fk = \rho \cdot \dfrac{\text{sen}.(45 + \frac{a}{4}) \cdot \text{sen}.(45 + \frac{b}{4}) \cdot \cos.\frac{c}{4}}{\sqrt{2} \cdot \cos.\frac{a}{4} \cdot \cos.\frac{b}{4} \cdot \text{sen}.(45 + \frac{c}{4})} \end{cases}$$

conforme al problema II. riportato di sopra.

Assoluta ancor questa ricerca, continua il Paucker le sue investigazioni di nuovi teoremi sulle *Tazioni*, e risolve inoltre i seguent problemi

PROBLEMA I.

fig. 7. *Iscrivere in un triangolo abc due cerchi tangenti, sicchè la linea de' loro centri risulti parallela ad una retta fk di posizione.*

Costruzione.

Iscrivasi il cerchio M nel triangolo dato, e condottovi il diametro rs parallelo alla retta data di posizione, si tirino le ar, bs, che s' interseghino in n; ed as, br che s' interseghino in N: i punti n, N saranno i contatti dimandati. E tirando da questi punti le parallele alla fk, i punti d, e, D, E, ove queste incontreranno le seganti Ma, Mb, saranno i centri de' cerchi dimandati

PROBLEMA II.

fig. 8. *In un triangolo abc iscrivere due cerchi tangenti d, e, tal che condotta ad essi le comune tangente interiore, questa incontri la base ab in un punto dato q.*

Costruzione.

Iscrivasi nel triangolo dato il cerchio M, che tocchi il lato bc in A; e congiunte le Ma, Mb, dal punto dato q si tiri la perpendicolare qL ad una delle seganti, che taglia l' altra in O. Pe' punti L, O, e col diametro uguale alla tangente Ac, descrivasi il cerchio R; e poi col centro q descrivansi due cerchi concentrici tangenti l' altro R. Le loro circonferenze taglieranno la base, l' una in

g, h', l'altra in G, H', che saranno i punti ne' quali i cerchi dimandati dovranno toccare la base. Da questi punti si tirino le perpendicolari; queste segneranno sulle seganti Ma, Mb i centri di tali cerchi

Problema III.

Iscrivere in un triangolo abc tre cerchi tangenti, sicchè i contatti de' due primi con due lati, confondansi con quelli del terzo cerchio co' medesimi lati. *fig.* 9.

Costruzione.

Iscrivasi nel triangolo il cerchio M, che tocchi i lati in A, B, C, congiungasi Cc, e bisecato l'angolo aCc, sieno d, E i punti d'incontro della retta, che il biseca colle seganti Ma, Mb. Dividasi similmente l'angolo bCc per metà, e la dividente incontri le Mb, Ma in e, D; uniscansi poi le de, DE, queste incontreranno la retta Cc in n, N; di tal che Nn = Ac = cB.

Il Paucker invita il lettore a paragonare tal sua soluzione con quella del Lechmutz, pubblicata nell'appendice al vol I. della Geometria di questo distinto professore. E noi, mirando sempre allo scopo principale propostoci, invitiamo i coltivatori dell' analisi pura a trattare col loro metodo, con la stessa facilità e chiarezza, questi problemi, e le altre ricerche dal Paucker geometricamente rinvenute ed esposte.

NUM. VIII.

Osservazioni sulle precedenti ricerche sul problema del Malfatti.

1. Dall' esposizione fatta delle diverse ricerche per la soluzione di questo difficil problema è facile rilevare, che la soluzione originale algebrica di esso sia quella del Malfatti, la quale vi avrebbe interamente soddisfatto, se il sagace autore, ad evitare la lunghezza e complicazione del calcolo da lui eseguito, per giugnere a quelle tre equazioni, che suppone e poi verifica, non si fosse veduto costretto a preferir questo ripiego. Ma niuno potrà negare a siffatta verifica quel grado di semplicità e di evidenza, che dovea da sì distinto geometra aspettarsi. L'analisi, per quella piccola parte che ne appare, è ricca di belle verità nuove, che facilmente ne derivano, delle quali quella che leggesi nella nota *num.* 31 (*pag.* 62), dimostrata in maniera diretta, forma la base della più elegante soluzione geometrica di quel problema: ed essa impropriamente attribuita al sig. Tédenat valente matematico francese, è stata riguardata come un bel teorema, che si è più comunemente intitolato col suo nome.

Il risultamento finale dell'analisi del Malfatti mena ad una costruzione elegantissima, eludendo ogni aspettazione: e si osservi a tal proposito esser questa la principal cosa cui mirava il Malfatti; giacchè la soluzione del problema gli era dimandata da un artista per usarne in pratica. La soluzione dunque del Malfatti, considerata per questa sola parte, non lascia che desiderare.

2. Gli sforzi riuniti de' compilatori degli *Annali* in risolverlo, prima di conoscere la soluzione del Malfatti, mostran chiaro il lun-

go studio, e gli stenti, che dovettero soffrire per più anni, a fin di pervenire ad una espressione incostruibile del raggio dell' un de' cerchi; che però giustamente essi la tennero come un valore, o considerarono però il problema per aritmeticamente risoluto: nè avvertirono tampoco la riduzione, che poteva farsene a forma più semplice e costruibilissima, come quella del Malfatti, nè pur quando ebbero questa innanzi gli occhi; che anzi manifestamente affermarono, che la loro espressione del raggio r (*pag.* 69) dell' un de' tre cerchi, e quella corrispondente del Malfatti (*not.* 34.), sebbene identiche, sembrassero però incomunicanti, e da non vedersi modo da ridurre l'una all'altra.

Aggiungasi, che gli *annalisti*, in tal problema che, per la sua natura anche posizionale, avrebbe meritato di esser trattato col loro metodo prediletto *delle coordinate*, di cui tanto erano allora occupati in mostrare l' efficacia al paragon degli altri, dovettero rinunziarvi, ripiegando sul metodo algebrico-geometrico antico, sebbene non perfettamente adoperandolo, non vedendosi la loro analisi connessa e regolare. La Geometria dunque, nel cui dominio era questo problema, nulla aveva vantaggiato dalle faticose ricerche degli *annalisti*.

3. Conosciuta ch' essi ebbero la soluzione del Malfatti, che mostrarono apprezzar grandemente, vollero tentar la verifica delle tre equazioni da quello assunte, in maniera che essi giudicarono più semplice. Ma a noi non pare, avendo riguardo alla moltiplicità delle sostituzioni e riduzioni, che possa tal verifica prevalere in semplicità e naturalezza a quella del Malfatti. Del rimanente, ciò niente montando, lasciamo agli altri giudicarne.

4. Imitolli in questa ricerca il Tédenat, e nè tampoco sembra, ch' egli avesse vantaggiata l' analisi del Malfatti (il solo oggetto,

che si avrebbe dovuto prender di mira, o continuando l' analisi da quello intrapresa, in modo da giugnere facilmente al termine di essa, evitando quella trasmutazione in teorema, o anche dimostrando questo in modo diretto e semplice). E tutto quello che si potrebbe al più raccogliere dalle ricerche del Tédenat sarebbe quel teorema, che noi abbiamo veduto esser evidentemente compreso nell'analisi del Malfatti; e che avrebbe dovuto rimeritarne il Tédenat, sol quando lo avesse in modo diretto e geometrico dimostrato.

5. Con la scorta della soluzione del Malfatti, e sempre mirando a' risultamenti da questo ottenuti, il professore Lechmütz di Berlino ne aveva intrapresa una nuova soluzione, che avrebbe meglio corrisposto allo scopo, se non fosse stato in obbligo di sopraccaricarla di formole trigonometriche, e di non lievi analitici ripieghi.

6. Fin quì dunque non si aveva di tal problema una soluzione puramente geometrica, come richiedevasi, nè tampoco una costruzione che derivasse da un' analisi algebrica regolare; al primo de' quali oggetti mirando il sig. Paucker, distinto geometra associato all' Accademia di Pietroburgo, presentò a questa, nel 1828, la sua soluzione, che vedesi inserita nel volume degli Atti di essa per l' anno 1831.

L'orditura di questa soluzione geometrica, sebbene ammirabile, è però, come si è veduto, lunga ed intralciata, di tal che l' illustre autore non fidandosi di sostenerne una lunga analisi geometrica, contenente molti nuovi lemmi, per altro importanti, anche a parte della soluzione cui servono, si vide costretto a tacer quella, ed a rivolgersi alla dimostrazione della costruzione presentata del problema; dalla quale non potrebbesi facilmente, se mai alcuno il desiderasse, fare ritorno all'analisi del medesimo.

Per tali ragioni non desistevasi, dagli apprezzatori dell' antica Geometria, di dimandare di questo problema una soluzione sì semplice come la natura del medesimo; dal che fui indotto al procedimento indicato nella parte II. delle presenti *Considerazioni*. Nè credo per ciò avere men che accortamente operato, da raccoglierne anzi che lode, alla quale non pretendo certo, ma almeno nè men taccia di far rivivere cose già viete, e poco curate. E da prima sappian coloro i quali non chè così pensano, osano ancor propalare simili sciocchezze, nessuna ricerca in Matematiche invecchiar mai, quando in nuova forma, e migliore si riproduca. Dover anzi queste scienze a ciò i loro più grandi progressi: del che potrei addurre molti esempj, che tralascio per non deviar troppo dal mio scopo, limitandomi solamente a ricordare, ad istruzion di coloro che hanno profferita simile proposizione, che i problemi di trisegar l' angolo e duplicar il cubo, furono ripetutamente trattati, e pel corso intero di secoli nella scuola Greca; nè però vi fu chi tra que' sommi uomini credesse ciò mal fatto, ed indegna de' più gran geometri una tale occupazione. Gli stessi, non appena il Cartesio produsse la sua novella Geometria, ricomparvero in iscena; e da quell' epoca fin ora quante soluzioni con diverso metodo, e quante ricerche su di essi non si sono fatte, che hanno di gran lunga contribuito a promuovere le Matematiche? Ed ultimamente i coltivatori del metodo puro analitico hanno creduto non poter far a meno di occuparsene; sebbene le loro ricerche non sieno corrispondenti alla natura di tali problemi, essendosene dell' uno data una soluzione approssimante, dell' altro meccanica: che anzi spiace a' rigorosi estimatori del grado e natura de' problemi, il veder quello della trisezione dell' angolo ascritto tra le ricerche di analisi trascendente. Sarebbe dunque solamente

divenuto indecente il riprodurre in iscena un problema difficile apparso la prima volta alla considerazione de' geometri da circa 38 anni fa ; e da quell' epoca a diverse riprese tentato da matematici distinti di tutta Europa' , senza mai dimenticarlo , e cercandone sempre una più elegante soluzione ? Se questa maniera di ragionare sia di chi ha sano intendimento , e cuor non corrotto , il lascio giudicare ad altri .

Finalmente aggiugnerò come nobil conchiusione al fin qui detto il sentimento del La-Grange così espresso . » E c' est toujours contribuer à l' avancement des Mathématiques , que de » montrer comment on peut résoudre les mêmes questions, et parvenir » aux mêmes resultats par des voies tres differentes ; les métho» des se prêtent par ce moyen un jour mutuel , et en acquierent » souvent un plus grand degré d' evidence et de généralité (*Nouvelle solution du probléme du mouvement de rotation d' un corps de figure quelconque , qui n' est animé par aucune force accélératrice.* Académie de Berlin an. 1773).

NOTA AGGIUNTA

alla *pag.* 23 nell' ultimo rigo, ove dicesi *impossibilità.*

Poichè l' oggetto che mi ho proposto con questo mio programma è quello d' istruire, e non altro, conviene che mi occupi a comentare quel luogo di Pappo, di cui ne aveva alla *pag.* 22 recata solamente la parte, che mi occorreva, per mostrare a chi si appartenesse la determinazione ne' problemi. Ma avendo poi avvertito, dall' impropria *risposta al Programma*, che ciò ch' egli soggiungne sia stato malamente da coloro inteso, por difetto di conoscenza nella Geometria, mi sono creduto nel dovere d' interpetrarglielo convenevolmente. Il luogo per intero è il seguente: Pappo indrizzando a Cratisto suo amico, o geometra perspicasissimo, questo terzo libro delle *Collezioni*, gli dice: *Qui vero proponit problema, siquidem indoctus est, et omnino rudis, quamquam proponat id, quod constrni quodammodo non possit, dignus venia est, et culpa vacat. Quaerentis enim officium est, et hoc determinare, et id quod fieri, et quod minime fieri potest; et si fieri potest quando, et quomodo, et quotupliciter fieri possit.* Fin qui il precetto di Pappo è assoluto, ed accorda al geometra, ed al non geometra il proporre problemi come gli piace, dando ad obbligo del risolutore il dimostrarne l' impossibilità, o assegnarne la compiuta determinaziono. Ed avvertasi puro, che il greco autore, la cui dottrina è quella di tutta la scuola antica, con quel *construi quodammodo non possit*, riferisce il suo precetto *all' assoluta impossibilità*, sicchè debba esservi ripugnanza geometrica nelle condizioni del problema proposto; come di chi per esempio proponesse a costruire un triangolo con tre rette, che fossero come i numeri 5, 3, 2. Poi così ripiglia. *Quod si quis* imperite *proponat, cum mathematicas scientias profiteatur, non est extra culpam.* Ed ora, esaurito interamente quel primo precetto, ne incolpa chi essendo matematico proponesse *imperitamente* un problema. Ma qui egli non si arresta, e subito entra a dichiarare quell' *imperitamente* cosa valesse, soggiugnendo al suo amico: *Nuper quidam eorum qui mathematicas scientias profitentur, per tuas problematum propositiones* imperite *nobis determinarunt; de quibus, et similibus oportebat nos ad tuam, et studiosorum utilitatem in tertio libro Collectionum mathematicarum demonstrationes afferre. Primum igitur problema, quidam qui magnus geometra

videbatur inscite determinavit (si noti che non dice *proposuit*) *: etenim datis duabus rectis lineis duas medias proportionales in continua analogia invenire* SE SE DIXIT PER PLANORUM CONTEMPLATIONEM. L'*imperite* dunque è relativo ad un che voleva risolvere come piano il problema delle due medie proporzionali, vale a dire, che pretendevane una risoluzione contraddittoria alla sua natura. E chi di noi non dice lo stesso de' nostri *trissegatori* e *duplicatori*; e farebbe torto ad un geometra che ciò pretendesse. Se dunque nel proporsi ripetutamente il problema sulla piramide da matematici distinti, si è pretesa qualche cosa contraddittoria alla natura del problema, i risponditori al programma avranno ragione di prevalersi del luogo di Pappo; ma se nulla di ciò, è un' audacia il porre innanzi un testo di greco maestro, che essi non sanno nè meno intendere.

Fig. 1.
B
Q
Q'
C'
Y
A'
C''
B'''
A''
P
R
C'''
A'''
N
Z
X'
C
B''
B'
R'
P'
A
Fig. 2.
E
D'
F'
D
E'
F

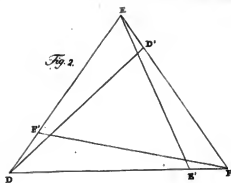
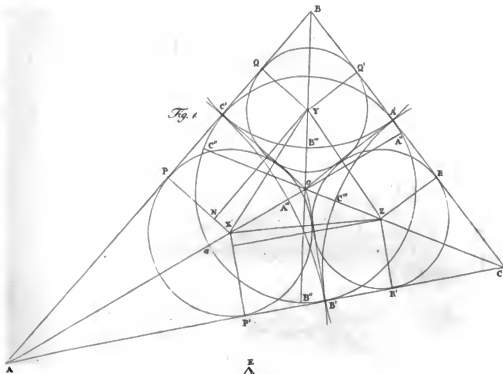
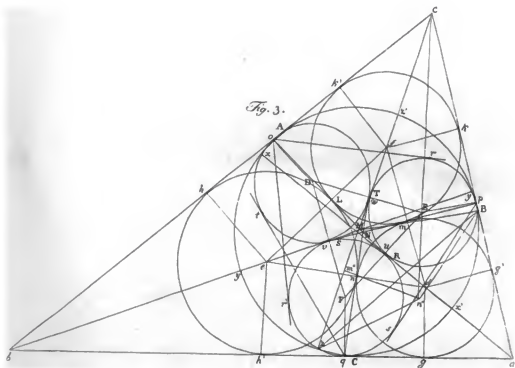
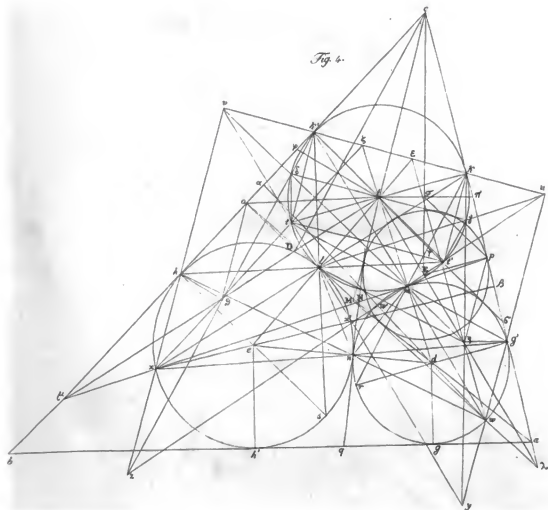
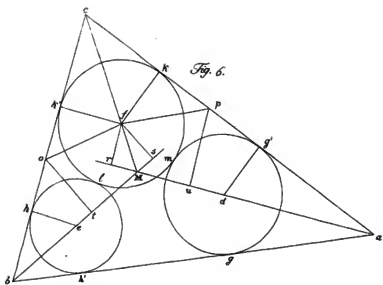
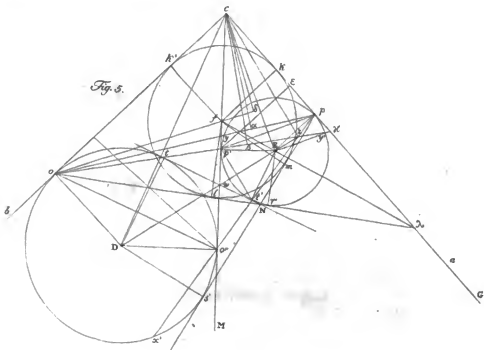
Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.
Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

PARTE SECONDA

MEMORIE PREMIATE

IN RISPOSTA AL

PROGRAMMA

STORIA E VICENDE

DEL

PROGRAMMA

Verso la fine dell'anno 1838 furono gentilmente inviati, dall' Accademia di Pietroburgo, al nostro *Istituto d' Incoraggiamento*, alcuni volumi de' suoi nuovi Atti, tra' quali era il primo delle *Mémoires présentées a l' Académie par divers savans*. Trovatomi in quell' adunanza nel presentarsi un tal dono, fui spinto a frugar que' volumi, per rilevarne ciò che di recente vi si fosse fatto inserire da una delle principali Accademie di Europa, la quale fin dalla fondazione, stabilita dall' immortal Pietro il Grande, e proseguita sotto gli auspicj, e gl' incoraggiamenti di un' illustre sovrana protettrice delle scienze, e de' dotti uomini, che da per ogni dove richiamovvi, colmandoli di onori e distinzioni, aveva incessantemente prodotti lavori egregj [1].

---

[1] L'Accademia imperiale di Pietroburgo fu istituita da Pietro I. nel 1724;

Or tra le memorie di Matematiche, del volume testè indicato, escito in luce fin dall' anno 1831., eravane una di un distinto professore nell' Università di Mittau in Curlandia, il *sig. Paucker*, del quale mi era prima pur ignoto il nome; poichè noi viviamo isolati in fatto di scienze, nè può un privato cultore di esse, principalmente delle Matematiche, esser bastante ad aver estesa corrispondenza al di fuori, ed a provvedersi tutte quelle opere, che a tenerlo al corrente del loro stato richieggonsi. Era quella intitolata: *Mémoire sur une question de Géomètrie relative aux Tactions des cercles*, e riguardava un problema degno della considerazione di noi italiani, perchè tra noi proposto la prima volta, e trattato, col cominciar del

---

ma la morte immatura di questo raro e generoso Sovrano non avendoli permesso veder compiuta la sua sublime opera, supplivvi con pari impegno e consiglio la sua immortal consorte Caterina, nel seguente anno, chiamandovi tra gli altri insigni dotti stranieri i due Bernoulli, Nicola, e Daniele, i quali le proccurarono il vantaggio incalcolabile di attirarvi Lionardo Eulero, che dopo aver arricchita di segnalati lavori, e distinti suoi allievi quell' Accademia, lasciolla erede di grandissimo numero di Memorie, che con dispiacere de' dotti non veggonsi pubblicare.

Questo corpo distinto, che forma l' areopago delle scienze per tutto l' impero Russo, è stato non ha guari (con un *oukase* imperiale, del dì 8 gennajo 1836) portato ad un grado sì alto di splendore, che onora veramente la dignità di quel Sovrano, la nazione, e gli scienziati, che sono stati prescelti a dirigerne l' istruzione, ed i progressi.

corrente secolo, in una delle più illustri società di scienziati, che non cesserà mai di prosperare, perchè n' è tale l' istituzione da porla a coperto dalle gelosie e gare di coloro, che nelle altre or riescono ad intrudersi senza alcun merito; e che non potendo essi adempiere a' loro obblighi, brigano, e disturbano che altri il facessero [1]. Accresceva in me l' impegno a considerar questo lavoro la sua affinità a' problemi delle *Tazioni* degli antichi, pe' quali il nostro Fergola aveva data una general soluzione geometrica, veramente degna de' bei tempi dell' antica scuola greca, e di quel gran geometra, che primo aveva impreso a trattare tal famiglia di problemi [2]; e mi recava sorpresa, che nè Apollonio, nè altri de' valentissimi geometri di que' tempi, e posteriori, in tanta copia di ricerche fatte su quelli, avesse mai a questo pur pensato. Richiesi però

---

[1] Di un tal problema proposto dal celebre matematico *Malfatti*, dal cui nome è stato posteriormente detto, potrà vedersene la storia nelle mie *Considerazioni geometriche sul Programma*. (Vedi la parte I. delle *Produzioni* su di esso.)

[2] Le soluzioni del Fergola di questi problemi furono da me presentate alla nostra R. A. delle Scienze fin dalla sua istituzione nel 1808, e pria che venissero pubblicate nel vol. I. de' suoi Atti, le diedi fuora in un opuscolo, che vide la luce nel 1809, dalla Stamperia Reale, del quale essendo stati tirati pochi esemplari, fu però, per comodo di coloro che il richiedevano, inserito anche nella *Biblioteca Analitica* (febb. 1810).

il volume suddetto al bibliotecario di quell' Istituto, ch' è uno de'nostri più dotti, e distinti concittadini *; ed egli avendomelo gentilmente confidato, mi posi subito a percorrere l' elaboratissima soluzione del Paucker, che ad ogni passo scorgeva divenire una ricca miniera di nuove, e belle verità su' contatti de' cerchi tra loro, e co' lati di un triangolo ove intendansi con date condizioni iscritti; il che spingevami sempre più ad attentamente considerarla. Rivoltomi dunque a ciò, e messomi a svolgere l' analisi del problema, ne fui frastornato dalla complicazione delle figure, e moltiplicità delle linee intersegantisi in un medesimo punto, non che dalla piccolezza delle lettere dinotanti questi, che per l' estrema debilitazione de' miei occhi, mi si rendevano quasi impercettibili, e producevanmi grandissima confusione. Non volendo perciò abbandonar la cosa, che aveva pur saggiata ben difficile, mi rivolsi all' espediente d' incaricare il mio antico allievo Nicola Trudi, assai versato in ricerche geometriche, e passio-

---

* Mi è grato rendere questo attestato di rispetto, ed amicizia al valentissimo anatomico, e naturalista Stefano delle Chiaje, il cui distinto merito vien dimostrato da' suoi frequenti lavori tendenti a' progressi rapidi dall' Anatomia comparata; e mi compiaccio in ricordare aver io scorto in lui ciò che sarebbe divenuto, fin da' primi tempi della sua modesta carriera, di che può egli esserne il miglior testimone.

natissimo di tali scienze, di leggere egli il lavoro del Paucker, e rendermene poi conto; aggiugnendo ancora, che mi avrebbe fatta cosa non poco grata, se avesse voluto prendersi pena di rifarmi più grandi le figure, raddoppiando le più complicate, per eseguir parte della costruzione sull' una, parte sull' altra. Mi fu però di non lieve sorpresa il veder costui ritornar da me, dopo alcuni giorni, non solo con aver soddisfatto a' miei desiderj, ma anche presentandomi una nuova elegantissima soluzione geometrica di sì difficil problema.

Fu mio primo intendimento presentar quest' egregio lavoro all' Accademia nostra, onde far ad essa da' fatti valutare il merito singolare di questo nostro concittadino, o di pubblicarlo a dirittura, appellandone a giudice più imparziale, sperando poter così riescire a riguadagnarlo alle Matematiche, con qualche impiego in esse, che valesse a divertirlo dalla pur troppo per lui impropria carriera, non vedendo in me al presente altri mezzi diretti a produrlo, come per l'addietro mi era concesso, e de' quali il pubblico non potrà al certo rimproverarmi di non aver usato con suo sommo vantaggio, e decoro.

Un tal mio pensamento veniva però frastornato dal conoscere pur troppo l'andamento attuale delle nostre cose, da che mi sono indotto ad ingerirmi il meno

possibile; ed era ben sicuro, che gelosi alcuni tra noi di vedersi superati, altri temendo ostacoli alla speranza di qualche nuova carica, cui troppo tardi aspirano, altri per assoluta imperizia, avrebbero, dall' estrema semplicità di un tal lavoro, giudicato di esso sconvenevolmente, ed al più, senza nè men guardarlo, l'avrebbero onorato, come sogliono di altri lavori, di *puro esercizio di scuola*.

Parevami inoltre la soluzione del Trudi, ed il problema stesso assai atto a far cessare le vane dispute di prevalenza di metodi nell' inventar geometrico, da che troppo ne soffre la buona istituzione, e però debbonvi le Accademie principalmente prender parte; poichè destinate a' progressi delle scienze, non potranno tendere a tale scopo, senza rimuover prima gli ostacoli, che vi si oppongono. Volendo dunque spinger le menti de'nostri cultori delle Matematiche a tentare ciascuno come meglio crederebbe tal problema, a fine di far loro riconoscere la difficoltà in risolverlo, e ciò che un metodo, o l'altro potesse valervi, mi decisi finalmente a dimandarne al pubblico la soluzione: a che inducevami anche il credere potersi in tal modo rianimar presso noi lo spirito matematico, che con sommo dispiacere, dopo lunga carriera, vedeva caduto in un certo languore.

Fittomi ciò nel pensiero, come che aveva altra volta associato al lavoro del Fergola sulle *Tazioni* l'altro analogo da me fatto su' *Contatti sferici* [5], pensai promuovere ancor questo di pari col primo, proponendo a risolvere il problema *dell' iscrizione di quattro sfere nella piramide triangolare*, col quale sarebbesi anche reso compiuto l' altro mio lavoro su questo solido [6]. Nè, quantunque ben senza taccia il potessi, lo avventurai pure senza avervi prima fatta qualche preliminare considerazione, da che m'indussi a distinguerne alquanto l'enunciazione dall'altro affine sul triangolo; e mentre questo lo aveva detto *dato di specie e di grandezza* quella mi limitai a dirla semplicemente *data*, cioè *proposta*; onde così mostrare la preliminare determinazione, che abbisognava per risolverlo: nè però pensai, nè penso sì poco avvedutamente da credere, che altri avessero mal proposto un tal problema, dicendo *data una piramide qualunque* [7].

Risolutomi dunque a pubblicare un programma, stimai a proposito farvi concorrere una terza non meno

---

[5] Vegg. l'*Addizione alle nuove soluzioni de' problemi delle Tazioni del Fergola*, pubblicata nel 1809, e la Memoria *su' contatti sferici* inserita nel vol. I. de' nostri Atti.

[6] Memoria *sulla piramide triangolare* (Atti vol. I.).

[7] Si leggano a questo proposito le *Considerazioni* ec. da pag. 21 a 27.

importante quistione, ancor assai confacente al mio scopo soprindicato. É stato sempre costume in nostra scuola di non abbandonare un qualunque soggetto cui si fosse rivolti, senza aver fatti tutt' i tentativi per ridurlo alla sua maggior perfezione, e presentarlo in ogni sua parte compiuto. Or è assai noto, che fin da circa cinquant' anni fa si distinse grandemente, e fecesi valutare per geometra di gran valore, nella tenerissima età di sedici anni, il nostro Annibale Giordano, quando egli era sotto la direzione del Fergola, con l' elegante soluzione, che presentò a' matematici di Europa, del famoso problema del Cramer, esteso di più al poligono da descriversi nel cerchio, fatta inserire dal celebre Lorgna tra le *Memorie della Società Italiana*, nel vol. IV. di queste; il che fu sprone a valentissimi matematici di occuparsene ancor essi [1]. Ma dopo il giro di venti anni, essendosi da noi ripigliate le ricerche sullo stesso problema, che mossero poi, come abbiam ragione di sospettare, a concorrervi i coltivatori de' nuovi metodi [2], dimandavamo, che una volta, a

---

[1] Pe' particolari di questo argomento si potrà leggere la parte II. delle *Considerazioni* ec.

[2] Si riscontri la nota *(1)* all' ediz. 2. del *Programma*. E qui mi sia permesso di fugacemente accennare, che con piacer sommo, dalle più recenti opere da taluni de' più distinti analisti di oltremonti pubblicate, rav-

decoro della scienza analitica , si compisse con la conveniente costruzione , l' elegante soluzione algebrico-geometrica , che di quel problema aveva presentata all' Europa l'illustre Lagrange [°] , arrestandosi all' equazione per essa , della quale non meno che l' Eulero aveva dubitato potersi convenevolmente costruire , e 'l suo discepolo Lexell invano se n' era indefessamente occupato. Rivolte a ciò le sue assidue cure il suddetto Trudi , era finalmente riescito in mirabil modo ad ottenere quella tanto desiderata , e per tanto tempo invano tentata costruzione : ed era ancor essa un chiaro argomento de' vantaggi, che presenta a' coltivatori della moderna analisi una precedente solida istituzione geometrica. Per tutte queste ragioni stimai espediente riproporre la dimanda di tal costruzione per altro quesito del programma , costituendolo con tre difficili ricerche. E per mostrare qual soddisfazione provasse il mio animo in vedervi concorrere la gioventù nostra , addiceva a ciascuna risposta il tenue premio di una

---

viso con quale impegno siensi da qualche tempo dati a coltivare lo studio degli antichi geometri , e quale immenso profitto ne abbian tratto , per la scienza analitico-geometrica ; il che non vi sarà alcuno che possa negare esser in gran parte dovuto alle nostre ripetute spinte , come avremo più volte occasione di far altrove più distintamente rilevare .

[°] *Opuscoli Matematici della Scuola del Fergola a pag. 35.*

medaglia di oro del valore di ducati 60, non corrispondente al merito del lavoro, ma alla tenuità de' miei mezzi, che appena permettevanmi far lo sforzo di tal promessa.

Preparatomi a tutto ciò, richiedevasi inoltre, che un qualche corpo distinto di dotti guarentisse l' esatto adempimento di quanto nel programma promettevasi, per l' imparzialità del giudizio, e la scrupolosa conservazione del segreto, per coloro i cui lavori non fossero risultati approvabili, bruciandosi religiosamente le schede de' loro nomi: inoltre che desse la maggiore pubblicità possibile a tale operato, e lo rivestisse di decorosa e conveniente formalità; ed io non esitai punto a pensare, che a tali uficj potesse prestarsi la nostra R. A. delle Scienze. Composto dunque il programma gliel lessi, nel marzo 1839, e rimasi compiaciutissimo in vedere con quale attenzione essa ascoltollo, e della bontà ch' ebbe di permettere, che il pubblicassi nel modo da me richiestole, e che vedesi espresso in fine della stampa, che ne diedi fuori col terminar l' aprile di un tal anno. Fu esso generalmente ben accolto in tutto il nostro regno, al quale solamente ne limitava la proposta, come il dimostrano ben nove risposte, che da diversi luoghi di esso pervennero all' Accademia nel tempo prefisso: nè a ciò dee far

eccezione quella che irregolarmente fu pubblicata in Napoli, e della quale ancor più, che non convenivasi, si è detto nella parte precedente.

Or io, nell' agosto seguente, leggeva all' Accademia la prima, e la seconda parte delle mie *Considerazioni* sul programma, esponendo in breve la storia delle quistioni proposte, i motivi che mi avevano indotto a presceglierle, e ciò che per l' innanzi su di esse erasi da valentissimi matematici operato, non senza notarvi alcuna cosa sul proposito, preparando così a'miei colleghi la materia per l' esame che dovevan fare delle Memorie presentate. Indi pubblicava tali *Considerazioni*, che riunite poi da due miei allievi ad altre loro produzioni relative allo stesso argomento, han formata la parte I. delle *Produzioni sul-programma.*

Intanto le risposte pervenute all' Accademia giravano per le mani de' socj, e la classe matematica essendosi più di una volta riunita per l' oggetto, sebbene non al completo di essa, aveva avuto occasione di rilevare, che appena tre di quelle relative al primo e secondo quesito eran degne di molta considerazione, mentre le altre erano a dirittura equivocate, o riguardavano qualche caso particolare, e quasi intuitivo; ed io, che per serbarmi imparzialissimo, non aveva voluto affatto prender parte in tal esame, non dubita-

va che le tre, che si accennavano, fossero quelle appunto del sig. Trudi, da me fatte presentare.

Or altre occupazioni della classe matematica, e più rilevanti impegni dell' Accademia menavan per lunga la faccenda del programma, ed erasi già di molto ecceduto lo stadio di tempo assegnato in esso, per pubblicarsi la decisione, che quella doveva dare, ed i premj a conferirsi; per lo che vedendo io l' affare ridotto ne' termini di sopra accennati, e che non essendovi alcuna concorrenza con le risposte del Trudi, la decisione del premio doveva di necessità risultare in costui favore, presi l' espediente di ringraziar l' Accademia, ed i miei colleghi della classe matematica della pena che si erano compiaciuti prendere, richiamando a me solo il compimento di siffatta faccenda. Ed affinchè chiunque potesse giudicare dell' imparzialità del giudizio sulle risposte, le ho raccolte in un volume, consegnandolo alla *Biblioteca Reale Borbonica*, insieme alle schede co' motti delle memorie, che non hanno soddisfatto a' quesiti, le quali sono state religiosamente bruciate innanzi la *Giunta* incaricata della direzione di questa.

E poichè due delle tre memorie presentate dal Trudi riguardavano la costruzione dell' equazione del Lagrange, cioè il primo quesito, l'una col motto *Obscura*

promens, la quale presentava dopo l'analisi del Lagrange, la desiderata costruzione a modo geometrico, ed indi ne dava la dimostrazione; l' altra, che con progresso analitico deduceva quella costruzione dall' equazione suddetta, e nella quale la dimostrazione ottenevasi facilmente invertendo l' analisi già fatta, e questa avea per epigrafe: *Qui variare cupit rem prodigialiter unam*: nè dovendo di esse, per la loro identità, ritenere che una sola, ho creduto preferir la seconda, in cui il metodo di ricerca vedesi più naturalmente espresso. L' altra memoria, col motto: *Ordinis haec virtus erit*, riguardava il secondo quesito, cioè il problema del Malfatti, di cui se ne dà finalmente, come può ognuno giudicarne, una soluzione geometrica assai elegante, ed elementare, qual richiedevasi dalla natura del soggetto.

Giunto a questo termine, senza esitar affatto sul risultamento ottenuto, cercai adempier subito all' obbligo contratto verso il Trudi, pe' premj da lui assai ben meritati, rimettendogli la corrispondente somma di d. 120, accompagnandola con un mio biglietto: ma egli avendola ostinatamente ricusata ne' modi i più gentili, ed obbliganti, ho preso l' espediente di cambiargliela in libri classici di nostra scienza, che sapeva pur troppo averne egli bisogno; poichè doveva continuamente andarli a

studiare in qualche pubblica biblioteca, o pure improntarli da me.

Adempito per tal modo alla meglio a quanto nel programma erasi promesso, e contento del risultamento, che ne ho ottenuto, attraverso anche delle basse e poco decenti contrarietà tollerate; poichè non può negarsi, che da esso una spinta siesi data a' nostri cultori delle Matematiche in appigliarsi a lodevoli esercizj, e la scienza vi abbia guadagnato il chiesto compimento della soluzione al famoso problema del Cramer, divenuta degna della più alta considerazione, sol perchè escita dalle mani di un uomo insigne, qual'era il Lagrange, e da' sommi matematici contemporanei riputata difficilissima; senza dir delle altre ricerche affini di assai maggior difficoltà, e talune del tutto nuove, delle quali si è già accennato nella *dichiarazione* alla ristampa del programma, e nelle *Considerazioni*: ed esse verranno ora a mano a mano pubblicate. Inoltre la Geometria si è veduta in possesso di un' elegante soluzione di altro problema, che pur finora era stato da valentissimi matematici del presente secolo, con ogni sorta di metodo trattato: e dovrà loro riescir grato vederlo al fin ridotto a perfezione, ed eleganza propria della natura di esso; ed esser anche venute fuori, con questa occasione, molte dottrine per l' invenzione geometrica.

Aveva promesso di rilevare da tutte le ricerche fatte su gli argomenti proposti nel programma un parallelo de' metodi usati in trattarli : ma con piacere me ne veggo discaricato dall' evidenza in cui esso or si presenta a chiunque ponga a semplice confronto le soluzioni diverse de' difficili problemi precedentemente accennati ; e dopo tutto quello , che in diversi luoghi della parte I., e nelle note alle *Sezioni Coniche analitiche* del Fergola *(3. ediz.)* n' è stato per incidenza detto, e l'altro ancora , che può utilmente raccogliersi dalle elaborate ricerche geometriche eseguite in vario modo , con l' antica, o la moderna analisi , da' valentissimi nostri geometri Nicola Trudi, e Francesco Grimaldi (*). Alle quali evidenti prove di fatto , attissime a mostrare ad evidenza l'andamento di ciascun metodo antico , o moderno per l' invenzione geometrica ,

---

(*) I lavori geometrici del Trudi, che noi qui accenniamo, sono i seguenti

I.° *Sulle polari coniche reciproche.*

II.° *Teoremi sulle Sezioni Coniche utili alla risoluzione di difficili problemi .*

III.° *Il lemma* XXII. *del I.° libro* delle Tazioni di *Pappo esteso alle curve coniche , ed applicato alla . soluzione di difficili problemi .*

IV.° *Sull' iscrizione de' poligoni , con date condizioni , in una curva conica .*

Quelli , poi del Grimaldi consistono , per ora , in una *scelta di problemi solidi risoluti con l' antica , e la moderna analisi.*

aggiugnerò una generale esposizione di essi nel riprodurre, nel vol. I. degli *Opuscoli Matematici* da me già annunziati , quella dissertazione sul *Metodo in Matematiche ec.* , che fin dal 1822 pubblicai , dopo averla letta alla nostra R. A. delle Scienze . E per la stessa ragione , mi asterrò dal recare in questa pubblicazione del programma le ricerche sulla *determinazione ne' problemi geometrici* promesse nella parte I. di esso , non volendo per ora , che adempiere , il più subitamente che mi è stato permesso , all' obbligo contratto la prima volta che il proposi , per indi rimettermi nel cammino regolare de' miei lavori , principalmente per la pubblicazione degli *Opuscoli* suddetti.

Dopo tutto ciò non mi resta , che raccomandare a' nostri geometri la soluzione del terzo quesito , ricordando loro , che non sia esso il primo problema , che mostratosi da principio riluttante a tutti gli sforzi di valenti matematici , sia stato finalmente conquiso in modo , da guardar con ribrezzo la fatica duratavi , e le difficoltà incontrate . E per non uscir dal presente argomento , l' un de' casi è per l' appunto quello del problema del Cramer ; e prego coloro, che vorranno occuparsene , a tener presente ciò che fu detto nelle *Considerazioni* ec. part. I. (*p.* 25 e 26 .)

AL I. QUESITO DEL PROGRAMMA

RISPOSTA

DI

NICOLA TRUDI

COL MOTTO

Qui variare cupit rem prodigialiter unam.

QUESITO 1.°

DEL

PROGRAMMA

» *Esibire la corrispondente convenevole costruzione geometri-*
» *ca della soluzione analitica data dal Lagrange del problema*
» *di*: Iscrivere in un dato cerchio un triangolo i cui lati pas-
» sino per tre punti dati, *non dipartendosi affatto da que' me-*
» *desimi principj da quel sommo analista stabiliti*, *per per-*
» *venire all' equazione finale del medesimo ; e compiervi poi con*
» *gli stessi principj la dimostrazione analitica*.

Or io volendo conformarmi alla maniera precisa e categorica, come tal quistione è enunciata dal proponente, ho esibita in altra mia risposta, contemporaneamente a questa presentata, col motto *Obscura promens*, la costruzione e dimostrazione nel modo richiesto. Dopo ciò ho stimato conveniente di presentare ancora lo sviluppo semplice e diretto dell' analisi del Lagrange, che mi ha condotto alla dimandata costruzione, lasciando alla libertà dell' Accademia il vedere quale delle due risposte, identiche nello scopo, sia da esser preferita, se pure le troverà tali da meritare la sua approvazione.

SOLUZIONE ANALITICA

ABBOZZATA DAL LAGRANGE PEL PROBLEMA DEL CRAMER
CORREDATA DELLA CORRISPONDENTE COSTRUZIONE.

PROBLEMA

Iscrivere in un dato cerchio un triangolo, i cui lati passino per tre punti dati.

Soluz.—Sieno A, B, C i tre punti dati, ed MNP il chiesto triangolo. Si chiamino r il raggio del cerchio, A, B, C le tre distanze dal centro ai punti A, B, C; p, q le tangenti delle metà degli angoli noti AOB, AOC, ed x, z, v le tangenti delle metà degli angoli ignoti AOM, AON, AOP. Premesse queste indicazioni, applicando ai tre triangoli AON, BOP, COP il noto teorema trigonometrico, che » in ogni triangolo il prodotto della tangente della metà dell' angolo verticale per la » tangente della semidifferenza degli angoli alla base è quanto » la differenza de' lati intorno al vertice, divisa per la somma » de' lati stessi «, si otterranno le seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned} zx &= \frac{A-r}{A+r} \\ \frac{x-p}{1+px}\times\frac{v-p}{1+pv} &= \frac{B-r}{B+r} \\ \frac{z-q}{1+qz}\times\frac{v-q}{1+qv} &= \frac{C-r}{C+r} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

dalle quali eliminando due delle incognite , risulta un' equazione di 2.° grado ad una incognita , ch' è quella di cui si dimanda la costruzione .

Or è da osservarsi , che le espressioni $\frac{\nu - p}{1 + p\nu}$, $\frac{\nu - q}{1 + p\nu}$ corrispondono alle tangenti degli angoli $\frac{\mathrm{BOP}}{2}$, e $\frac{\mathrm{COP}}{2}$; di tal che quelle degli angoli $\frac{\mathrm{POE}}{2}$, e $\frac{\mathrm{POD}}{2}$ saranno dinotate da $\frac{1 + p\nu}{\nu - p}$, e $\frac{1 + q\nu}{\nu - q}$. Ma si ha $tang.\frac{\mathrm{POE}}{2} = tang.\left(\frac{\mathrm{POD}}{2} - \frac{\mathrm{EOD}}{2}\right)$ ed è poi $tang.\frac{\mathrm{EOD}}{2} = \frac{q - p}{1 + pq}$; sarà perciò $tang.\frac{\mathrm{POE}}{2} = \frac{1 + p\nu}{\nu - p}$
$$= \frac{\frac{1 + q\nu}{\nu - q} - \frac{q - p}{1 + pq}}{1 + \frac{1 + q\nu}{\nu - q} \cdot \frac{q - p}{1 + pq}}$$
. E se facciasi per brevità $\frac{1 + q\nu}{\nu - q} = y$, e $\frac{q - p}{1 + pq} = n$, risulterà $\frac{\nu - p}{1 + p\nu} = \frac{1 + ny}{y - n}$; ed eguagliato il raggio trigonometrico al raggio del cerchio dato , incontrandosi in T le tangenti de' punti P , D , ed in R quelle de' punti E , $\bar{\mathrm{D}}$, si avrà $\mathrm{TD} = \frac{1 + q\nu}{\nu - r} = y$, ed $\mathrm{RD} = \mathrm{RE} = n$.
Di più distendendo in K la tangente del punto d , si avrà $\mathrm{EK} = \frac{1}{n}$.

Ciò premesso , si pongano

$$\mathrm{A} - r = a \quad , \quad \mathrm{B} - r = b \quad , \quad \mathrm{C} - r = c$$
$$\mathrm{A} + r = a' \quad , \quad \mathrm{B} + r = b' \quad , \quad \mathrm{C} + r = c'$$

le equazioni (A) diverranno

$$zx = \frac{a}{a'} \qquad (1)$$

$$\frac{x-p}{1+px}\cdot\frac{1+ny}{y-n} = \frac{b}{b'} \qquad (2)$$

$$\frac{z-q}{1+qz}\cdot\frac{1}{y} = \frac{c}{c'} \qquad (3)$$

E ricavando il valor di x dalla (2), e riducendo in convenevol modo il risultamento, esso prenderà la seguente forma

$$x = \left(y - \frac{n-\frac{pb'}{b}}{1+n\frac{pb'}{b}} : y - \frac{n+\frac{b'}{pb}}{1-n.\frac{b'}{pb}}\right)\left(\frac{pb'}{b}+\frac{1}{n} : \frac{b'}{pb}-\frac{1}{n}\right)\left(1:p\right)$$

Inoltre l' equazione (2) da

$$z = \left(\frac{c'q}{c}+y : \frac{c'}{qc}-y\right)\left(1:q\right)$$

Quindi la (1) colla sostituzione di questi valori di x, z diviene

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{c'q}{c}+y : \frac{c'}{qc}-y\right)\left(y - \frac{n-\frac{pb'}{b}}{1+n.\frac{pb'}{b}} : y - \frac{n+\frac{b'}{pb}}{1-n.\frac{b'}{pb}}\right)\\ = \left(a:a'\right)\left(\frac{pb'}{b}+\frac{1}{n} : \frac{b'}{pb}-\frac{1}{n}\right)\left(p:\frac{1}{q}\right)\end{array}\right\}(4)$$

Si bisechino intanto gli angoli AOB, BOS con rette, che incontrino in v, v' la tangente in e. Lo stesso si pratichi cogli angoli AOC, COS, e le rette, che li bisecano s' incontrino in u, u' colla tangente in d. Saranno $\left\{\begin{array}{ll} ev = p, & du = q \\ ev' = \frac{1}{p}, & du' = \frac{1}{q}\end{array}\right.$

Or è chiaro, che se uniscansi le Bv, Bv', e si producano in V, V' sulla tangente in E, debbano risultare

$$EV = \frac{pb'}{b} \quad , \quad EV' = \frac{b'}{pb} .$$

E così distendendo fino ad U, U' sulla tangente in D le Cu, Cu', risulteranno

$$DU = \frac{qc'}{c} \quad , \quad DU' = \frac{c'}{qc} .$$

Quindi congiunte le OV, OV', che s' incontrino in z, z' colla tangente in r, si avrà $rz = \dfrac{n - \frac{pb'}{b}}{1 + n.\frac{pb'}{b}}$, ed $rz' = \dfrac{n + \frac{b'}{pb}}{1 - n.\frac{b'}{pb}}$.

Sicchè tagliate le DZ, DZ' eguali respettivamente alle rz, rz', risulterà $TZ = y - \dfrac{n - \frac{pb'}{b}}{1 + n.\frac{pb'}{b}}$, e $TZ' = y - \dfrac{n + \frac{b'}{pb}}{1 - n.\frac{b'}{pb}}$.

Inoltre è chiaro, che sieno $TU = \frac{c'q}{c} + y$, $TU' = \frac{c'}{cq} - y$

$VK = \frac{pb'}{b} + \frac{1}{n}$, e $V'K = \frac{b'}{pb} - \frac{1}{n}$. In conseguenza l' espressione (4) prenderà la seguente forma geometrica

(TU : TU') (TZ : TZ') = (As : AS) (ev : du') (VK : V'K).

Trovando dunque tra i quattro punti U, Z, U', Z' dati sulla tangente in D il punto T tale, che stia TU × TZ : TU' × TZ' in ragion composta delle date ragioni di As ad AS, di ev a du',

e di VK a V'K (*), sarà TD $= y = \frac{1+qu}{q-q}$. E condotta al cerchio la tangente TP, sarà P un vertice del triangolo richiesto.

(*) Questo problema di facile soluzione, cui vedesi chiaramente ridotta la dimandata costruzione, trovasi risoluto dal Simson tra quelli del Lib. II. *de sectione determinata*: sicchè la nostra costruzione vedesi nelle forme più convenienti alla sintesi eseguita. Ed è facile avvertire, che i due punti che si ottengono dalla soluzione del problema di riduzione, verranno ad assegnare i vertici de' due triangoli, che soddisfano al problema principale; e però la costruzione cercata avrà la sua piena e compiuta determinazione.

SOLUZIONE GEOMETRICA

DERIVATA DA' MEDESIMI PRINCIPJ, SU' QUALI È BASATA LA SOLUZIONE ANALITICA DEL LAGRANGE.

Lemma 1.°

Due angoli dOM, dOS al centro di un cerchio, siene biseca-ti dalle Ot, Ou, che incontrino in t, u la tangente in d. Indi si tirino le uS, tMh e si elevi su di Ou la perpendicolare Ou'. Si avrà sempre * *fig. 2.*

$$tu' : tu :: du' : hS.$$

Dim. — Si produca la Ot fino ad incontrare la uk parallela ad yz tangente in y. Avendosi $uk : yz :: Ou : Oy$, ovvero $:: Ou : Od$, oppure $:: Ou' : du'$, a causa della somiglianza de' triangoli rettangoli Odu, $Od'u$, si avrà $Ou' : uk :: du' : yz$, ma sta $Ou' : uk :: tu' : tu$; starà perciò $tu' : tu :: du' : yz$. Intanto essendo th tangente del cerchio in M, sarà l' angolo tOh metà di dOS, e quindi eguale tanto a dOu, quanto ad uOS. Risultando dunque l' angolo zOy uguale sì all' angolo MOh che all' altro hOS, risulterà pure yz eguale ad hs; e si avrà quindi

$$tu' : tu :: du' : hS.$$

come si è proposto a dimostrare.

Osservazione

Questo lemma non è che la formola trigonometrica

$$tang.(\alpha \pm \beta) = \frac{tang.\alpha \pm tang.\beta}{1 \mp tang.\alpha . tang.\beta}$$

tradotta in proprietà geometrica. Ed in vero designando per 1 il raggio Od, risultando $du' = \frac{1}{du}$, si ha $tu' = \frac{1}{du} + dt = \frac{1 + du.dt}{du}$, e $tu = du - dt$. Quindi per l' analogia rilevata nel lemma, avendosi

$$\frac{1 + du.dt}{du} : du - dt :: \frac{1}{du} : hS$$

si avrà

$$hS = \frac{du - dt}{1 + du.dt}$$

Se dunque s' indichino con α, β i due angoli dOu, dOt si rileverà

$$hS = tang.(\alpha - \beta) = \frac{tang.\alpha - tang.\beta}{1 + tang.\alpha\ tang\ \beta}$$

E qualora il punto M cadesse dall' altro lato del punto d, come in M', si rileverebbe

$$h'S = tang.(\alpha + \beta) = \frac{tang.\alpha + tang.\beta}{1 - tang.\alpha\ tang.\beta}$$

Lemma 2.°

* *fig. 3.* *Da un qualunque punto C preso sul diametro dD si tiri al cerchio una secante CMP. Se a' punti M, P si applichino le tangenti, che s' incontrino in t, T con quelle de' punti d, D, i tre punti C, t, T staran per dritto,*

Osservazione.

Questo lemma è un caso particolare del lemma 3.° nella seguente risposta al secondo quesito; e potrà ivi leggersene la dimostrazione. Ma intanto deve osservarsi, che desso nel caso presente è un altro noto teorema trigonometrico, volto del pari a proprietà geometrica, cioè: *In ogni triangolo la somma di due lati sta alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli alla base sta a quella della loro semidifferenza*. E, sol che si uniscano le OP, OM, ciò si vedrà chiaramente. Imperocchè, considerando CP come base del triangolo COP, sarà CD la somma degli altri due lati, Cd la loro differenza; DT, tangente della semisomma degli angoli alla base, e dt tangente della loro semidifferenza. Quindi si avrà CD : Cd :: DT : dt; d'onde segue, che i tre punti C, t, T, debbano star per dritto.

Analisi per la soluzione geometrica.

Sieno A, B, C i tre punti dati, ed MNP il triangolo richiesto. Uniti questi punti col centro, le congiungenti AO, BO, CO si distendano in S, E, D. Ciò posto sia u il punto d'incontro delle tangenti in d, S, ed al punto M si applichi la tangente tMh. Elevata su di Ou la perpendicolare Ou', starà pel lemma 1.° tu' : tu :: du' : hS; ma se uniscansi le Cu, Cu', e si distendano fino ad U, U' sulla tangente in D, che incontri in T la tangente del punto P, dovendo star per dritto i tre punti C, t, T, si ha tu' : tu :: TU' : TU; starà perciò

TU' : TU :: du' : hS (1)

Similmente essendo v il punto di concorso delle tangenti in e, s,

* fig. 4.

applicata al punto N la tangente xNf, elevata su di Ov la perpendicolare Ov', e prodotte le Bv, Bv' fino a V, V' sulla tangente in E, che s' incontri in X con quella del punto P, si conchiuderà $XV' : XV :: ev' : fs$ e da questa analogia, e dalla (1) si rileverà poi

$$(XV' : XV) (TU : TU') :: (hS : fs) (ev' : du') \quad (2)$$

Si bisechi intanto colla Or l' angolo DOE : essendo TOX metà di DOE, sarà quanto rOE; e perciò risultando $XOE = TOr$, risulterà pure $rL = EX$: tagliate adunque le rg, rg' eguali alle EV, FV', saranno le Lg, Lg' eguali alle XV, XV'. E se dal punto T si meni la parallela a gg', che incontri in G, G' le Og, Og', si avrà $XV' : XV :: TG' : TG$. Inoltre dovendo pel lemma 2.° star per dritto i tre punti A, f, h, si ha $hS : fs :: AS : As$. E dopo ciò l' analogia (2) diverrà

$$(TG' : TG) (TU : TU') :: (AS : As) \cdot (ev' : du')$$

Essendo date in conseguenza le quattro rette AS, As, ev', du', sarà data la ragion composta di TG' a TG, e di TU a TU'.

Or sia I il punto d' incontro di DU con OG, ed I' quello della stessa DU con OG' : i triangoli TI'G', TIG saranno dati di specie, e sarà data tanto la ragione di TG' a TI', quanto l' altra di TG a TI. Quindi sarà pur data la ragion composta di TI' a TI, e di TU a TU', ossia quella del rettangolo di TU in TI' all' altro di TU' in TI. Adunque il punto T sarà dato (come da Simson, citato innanzi a p. 8.) ; e con ciò sarà benanche data la posizione della tangente TP, che segna l' ignoto punto P.

RIFLESSIONI

SULLA PRECEDENTE SOLUZIONE GEOMETRICA DEL PROBLEMA DEL CRAMER, E SULLA COSTRUZIONE FINALMENTE RECATA ALL' ANALISI DEL LAGRANGE.

La precedente soluzione geometrica del problema del triangolo da iscriversi nel cerchio, sicchè ciascun lato passi per tre punti dati, fu presentata dal sig. Trudi al proponente il programma, dopo aver consegnata all' Accademia la risposta al 1.° quesito medesimo, uniformandosi al prescritto nel programma.

Si rileverà da essa primieramente, che camminando sulle orme segnate nella sua analisi algebrica dell' illustre Lagrange, poteva recarsi al problema una soluzione indipendente da' lemmi di Pappo, di cui eransi valuti il Castiglioni, l' Eulero, il Fuss, il Giordano, ed il Malfatti; da che sembrava, che la gran difficoltà in risolverlo per l' innanzi, fosse assolutamente riposta nel non essersi imbattuti in que' lemmi. Ed è però una tal soluzione la più elegante di quante se n'erano da questi valentissimi geometri precedentemente date. Apparirà ancora da essa la marcata corrispondenza tra l' analisi Cartesiana, e 'l metodo geometrico puro, e 'l mezzo di trasmutar l' una soluzione nell' altra, dove principalmente alcune formole trigonometriche formino la base dell' analisi, traducendole in corrispondenti proprietà geometriche.

Ma come mai sull' analisi del Lagrange esitaron tanto, e per sì lungo tempo uomini sommi, nel passare alla corrispondente costruzione geometrica, mentre essa or vedesi con tanta naturalezza dal Trudi esibita? Questa ricerca è per la scienza di non piccol vantaggio.

Cominciando dunque dal riflettere su quanto a tal proposito operossi dal Lexell, si vedrà che quest' insigne discepolo dell' Eulero, mosso dalle costui parole: *se dubitare utrum ista solutio analytica illustris de la Grange . . . . . ad aliquam expeditam et concinnam constructionem geometricam perducat*, postosi sul cammino di tentare una tal costruzione, cercò con algebrici ripieghi adattati a geometriche operazioni pervenire a formole costruibili delle espressioni degli angoli x, y, z. (*) Ma il cammino da lui adottato, dilungandolo sempre più dallo scopo cui mirava, dopo aver durata molta fatica in esibire formole costruibili in qualche modo per due angoli x, y, l' obbligò finalmente a conchiudere: *constructionem pro angolo z satis esse perplexam, nec ullum adhuc nobis se se obtulit artifitium, quo hae expressiones . . . . . per angulos vel arcus in figura facili negotio inveniendos construi se se paterentur*. Il che rende inutile tutto quel lungo lavoro algebrico da lui già fatto (**). E

(*) Sono questi angoli precisamente quelli, che nell' analisi del de la Grange hanno le tangenti delle loro metà dinotate da s, t, v.

(**) Non sa intendersi, come il Lexell, che nel soprascritto modo conchiuse il suo tentativo di costruzione avesse potuto, nel principio della sua memoria asserire: *Cum igitur mihi successerit constructionem haud complicatam ex ista solutione elicere*. Continuando poi a dire: *uti et aliam solutionem analyticam pro hoc problemate deferre*. . . . .

dee credersi, che in simil modo avesse proceduto l' Eulero ne' tentativi, che dovè fare pria di pronunziare ciò che sopra si è recato, onde rivolgersi poi ad altra soluzione algebrico-geometrica; e lo stesso per altri analisti di quel tempo, che da' detti dell' Eulero dovettero pur essere spinti a questa ricerca, e che si tacquero per non averla conseguita. Il Trudi al contrario ha preso un cammino tutto diverso e proprio alla natura del soggetto, da questa indicato a chi della Geometria sa fare convenevole uso. Egli si è rivolto a cercare a passo a passo le quantità geometriche corrispondenti a quelle trigonometriche formole, che inviluppano l' analisi del Lagrange, e che da esse immediatamente derivavansi; e questo semplice e natural procedimento per chi da espressione algebrica voglia passare a rette, non solamente dovevagli, com'è avvenuto, somministrare la desiderata costruzione, ma dargliela anche in modo facile e naturale, e fornirgli pure la trasformazione de' principj stessi, in verità geometriche, dalle quali ha pur tratta una elegantissima soluzione tutta nuova di quel problema. È ciò, il ripeto, è vero frutto di chi alle ricerche co' metodi analitici moderni accoppia la conoscenza e l'uso dell' antica Geometeia: nè altri, di ciò sfornito, potrebbe affatto riescirvi.

.... *etiamsi istas solutiones*, *quas propositurus sum* (intende la soluzione del de la Grange, da lui costruita, e l' altra nuova da esso datane) *elegantia et simplicitate multum concedant illis geometricis constructionibus*, *quas celeb. math. Castillon*, *Eulerus*, *et Fuss proposuerunt*. Ma del pari che la costruzione dell' analisi del de la Grange non fu effettuita, non apparisce vestigio in tal Memoria del Lexell dell' altra sua soluzione. E fa maraviglia che di tanti che sonosi occupati di questo problema, alcuno non abbia ciò avvertito.

Conchiuderò dunque da tutto ciò, che dalla proposta del 1°. quesito del programma, la Geometria abbia conseguito non solamente la desiderata costruzione, rimanendo così perfezionata la soluzione ingegnosa ordita dal Lagrange per tal problema; il che si era invano desiderato da' matematici posteriori, e da noi espressamente dimandata negli *Opuscoli matematici della scuola di Fergola*, pubblicati fin dal 1810: ma ancora una nuova e semplicissima soluzione geometrica del problema stesso, identica ne' principj di analisi a quella del Lagrange. Finalmente vi abbia pure rilevato un metodo elegante di costruzione per problemi analogamente risoluti, e di trasformazione di una soluzione da algebrica in geometrica. Tutt' i metodi d' inventare hanno i loro pregi, e qualche loro difetto; sarà sempre importante pel geometra il vedere una quistione stessa con ciascun di essi risoluta, valutando così dal fatto le risorse di ciascheduno, e sceglier tra essi la via più piana, e men faticosa onde pervenire al fine che si abbia prefisso.

Finalmente quel principio trigonometrico adottato dal Lagrange, trasformato in geometrico nel lemma 2.°, si vedrà fecondo di moltiplici applicazioni a risolvere difficili problemi, e lo stesso Trudi ne offre un esempio nella sua seguente risposta al II. Quesito. Ed egli in altri suoi lavori importanti, che saran di breve presentati al severo giudizio de' moderni geometri ed analisti (*), ne dimostrerà l' estensione alle curve coniche, e l' utile applicazione al problema del Cramer universalizzato.

(*) Veggasi la *Storia del programma* in fine.

AL II. QUESITO DEL PROGRAMMA

RISPOSTA

DI

NICOLA TRUDI

COL MOTTO

Ordinis haec virtus erit.

QUESITO 2.°

PROBLEMA

Iscrivere in un triangolo dato di specie e di grandezza tre cerchi, che si tocchino tra loro, e tocchino due a due i lati del triangolo.

ANAL. — Sia $a\,a'a''$ il triangolo dato, e vi si suppongano * *f.1, n.1.* iscritti i tre cerchi come si è richiesto. Se vi fosse un altro triangolo simile al proposto, che tenesse in se iscritti tre cerchi come quelli, che si cerca di iscrivere nel primo, il problema sarebbe immantinenti risoluto. Quindi assumendo un * *f.1, n.2.* angolo A'AA'' eguale ad uno dei tre angoli del triangolo dato, per esempio ad a, ed iscrivendo in esso un cerchio BQH di qualsisia grandezza, il problema si convertirà nell' altro: di iscrivere due altri cerchi LCD, C'KE per modo che si tocchino tra loro, tocchino il cerchio BQH, e i lati dell' angolo, e tali che la loro tangente comune DE sia parallela a qualunque retta che compia coll' angolo A un triangolo equiangolo ad $aa'a''$.

Premetteremo alla soluzione di questo problema i seguenti lemmi.

Lemma 1.°

* fig. 2. *Sia BL tangente comune di due cerchi, che si toccano, e QY una secante distesa pel contatto C, dico: I°, che l' angolo QGY risultante dall' incontro delle corde BQ, LY sia retto: II°, e che GC sia perpendicolare a QY.*

Dim. — Si unisca LC, e si distenda in H. Essendo i raggi OB, OH paralleli ad O'L, staran tra loro per dritto; e quindi l' angolo HQB sarà retto: ma per ragione del contatto C è QH parallela ad LY; dunque anche l' angolo QGY sarà retto.

II.° Risultando parimenti retto l' angolo BCL, i quattro punti B, C, L, G staranno alla circonferenza di un cerchio, e per le note proprietà di questa curva si avrà l' angolo BCG = BLG = YLA' = YCL. In conseguenza l' angolo BCL sarà eguale all' angolo GCY, e questo retto al par di quello, com'erasi proposto a dimostrare.

Lemma 2.

* fig. 3. *Due cerchi O, O' sien toccati da un terzo cerchio in C', C'', e da una retta in B, L, le corde BC', LC'' concorreranno in un punto X sulla circonferenza del terzo cerchio.*

Dim. — La BC' si distenda in X; sarà il raggio XO'' pàrarallelo ad OB, e quindi ad O'L: sicchè LC'' passerà benanche per X.

Corollario 1.°

Quindi le tangenti ne' punti X, X' saran parallele a BL.

Corollario 2.°

Suppongasi, che anche i cerchi O, O′ si tocchino tra loro in C, dovrà la congiungente XC risultare tangente comune a' cerchi medesimi; ed in vero se si produca la C′C″ in Z, avendosi l' angolo XC′C″ = LZC″ = BLX, i triangoli XC′C″, XLB saranno simili, e si avrà BX.XC′ = LX.XC′. Ma il primo rettangolo è quanto la differenza de' quadrati di OX, OC, e l' altro è quanto la differenza de' quadrati di O′X, O′C; adunque queste differenze saranno uguali; e risultando perciò XC perpendicolare ad OO′, dovrà toccare nel punto C l' uno e l'altro cerchio O, O′. * *fig. 4.*

Corollario 3.

È chiaro adunque che la CX sia il luogo de' punti da' quali condotte le tangenti a' cerchi O, O′, queste risultano eguali tra loro. Di più se la stessa CX si produca fino ad S sulla BL, dovrà bisecarla, risultando ciascuna delle SB, SL uguale ad SC.

Lemma 3.°

Sia G il punto, in cui s' incontrano due corde BQ, NC, di un cerchio, ed U, S i concorsi delle tangenti nelle loro estremità: i tre punti G, U, S staranno per dritto. * *fig. 5.*

Dim.—Si producano in A le tangenti de' punti B, Q, e si tirino le UP, UR parallele alle SQ, SC. Essendo AB = AQ, sarà UB = UP; similmente si mostrerà UN = UR: e dall' es-

sere UB = UN, si conchiuderà UP = UR ; ma queste sono rispettivamente parallele alle SQ , SC , che son del pari eguali tra loro , adunque le QC , PR saranno parallele ; e la loro ragione risultando eguale tanto a quella di QG a GP, quanto all' altra di QS a PU, queste ragioni saranno eguali ; e perciò i tre punti G , U , S staranno per dritto.

Corollario.

fig. 6. **Se la congiungente de' punti Q , C fosse un diametro del cerchio , le tangenti QS , CS risulterebbero parallele , ed in tal caso la UG diverrebbe parallela alle tangenti medesime.**

Lemma 4.

* *fig.7.* ***Sia BQHI un rettangolo iscritto in un cerchio, ed NM un diametro parallelo ad uno dei suoi lati BQ . Da qualunque punto G di questo lato cadan , passando per N , ed I le secanti GNC', GIC, le corde C'H , CM s' incontreranno in un punto F su'quel lato medesimo.***

Dim.—Sieno d , t , e i punti di concorso delle tangenti in N , I ; C , C' ; H , M ; i punti G, d , t staran per dritto *. Ciò posto sia K il punto , in cui s' incontrano le corde MC, NC' , dovrà risultare tK parallela alle Nd , Me * . Si avrà quindi Kt : Nd :: KG : GN ; ma se si prolunghi KM in F si ha KG : GN :: KF : FM ; starà dunque KF : FM :: Kt : Nd, ovvero :: Kt : Me ; per esser Nd = Me. E però dovendo la te passare pel punto F *, la C'H passerà benanche pel punto istesso ; il che dovea dimostarsi .

* *lem. 3.*

* *cor. prec.*

* *lem. 3.*

COROLLARIO.

È chiaro che se il punto G cada fuori del cerchio, debba anche il punto F caderne al di fuori, mentre i punti C,C′ debbono cadere sull' arco ICH. Se poi il punto G stia dentro del cerchio *, i punti C, C′ dovran trovarsi sull' arco BPQ, e quindi anche F starà dentro del cerchio. * *fig.* 8.

AVVERTIMENTO.

Il punto F, la di cui posizione dipende dal sito di G, sarà chiamato in seguito per brevità *punto di concorso corrispondente al punto G*.

PROBLEMA.

Dato il cerchio BQH iscritto in un dato angolo A, descrivere due altri cerchi, che si tocchino tra loro, tocchino il cerchio dato, e i lati dell' angolo, e tali che la loro tangente comune formi coll' angolo A un triangolo equiangolo al dato triangolo a′aa″ (*). *f.1.n.2.*

ANAL.—Sieno O′, O″ i centri de' cerchi cercati, che si tocchino tra loro in C″, tocchino in C, C′ il dato cerchio, in

(*) È da notarsi, che questo problema di conversione ammette diverse ipotesi, e quindi diverse soluzioni. Nella presente si suppone, che i due cerchi si tocchino al di sotto di BQH, e si considera la loro tangente comune inferiore, ciò corrispondendo al problema proposto; ma potrebbe anche supporsi, che i due cerchi fossero superiori al cerchio BQH *; potrebbero ancora considerarsi nell' un caso, e nell' altro le tangenti superiori *; considerarsi del pari le tangenti trasversali *; e così far altre supposizioni. Di che sarà detto altrove. * *fig.* 10. * *f.*11, e 12. * *fig.* 13.

L, K i lati dell' angolo, ed abbiano una tangente comune DE, che formi coll' angolo A il triangolo A'AA'' equiangolo ad a'aa''. Si uniscano le DC, EC'; queste dovranno incontrarsi in un punto P sulla circonferenza del cerchio O *; e poichè la tangente in P risultar dee parallela a DE *, il punto P sarà dato. Dovendo inoltre le corde PB, DL incontrarsi ad angolo retto in un punto T, ed esser TC perpendicolare a PD *, si avrà DP.PC = PT². Similmente si vedrà risultare EP.PC' = PV²; e per essere DP.PC = EP.PC' *, si conchiuderà PT² = PV²; ossia PT = PV.

* lem. 2.
* c.1.l.2.
* lem. 1.
* c.2.l.2.

Di più si unisca LC, e si distenda in H. Essendo retto l'angolo BCL, e quindi anche il suo conseguente BCH; il punto H sarà dato, per esser dato il punto B. E così, congiungendo KC', e prolungandola in I, questo punto sarà dato per esser dato il punto Q.

Ciò premesso anche le corde QC, KC'' dovranno incontrarsi nel punto Y sulla circonferenza LCD; la YC' dovrà toccare i due cerchi O, O'' nel punto C', e si avrà QY.YC = YC'². Or dovendo le corde QB, YL incontrarsi ad angolo retto, e risultar GC perpendicolare a QY*, essa dovrà passare pel dato punto I; e si avrà QY.YC = YG². Sarà quindi YG = YC'. Ma se uniscasi GC', e pel punto N ove incontra il cerchio si tiri la tangente NR, l'è anche NR = RC'; sarà dunque NR parallela a GY, e perciò il diametro, che passa per N sarà parallelo a BQ. Vale a dire il punto N sarà dato. In egual modo, per essere retto l'angolo BFX, ed FC' perpendicolare a BX si vedrà che FC' debba passare pel dato punto H; e si vedrà inoltre, che la FC debba incontrare il cerchio O nel

* lem. 1.

dato punto M, estremo del diametro parallelo a BQ, ch'è lo stesso diametro che passa per N.

Intanto è chiaro, che la figura BQIH sia un rettangolo iscritto nel cerchio O, il cui diametro NM è parallelo a BQ: in conseguenza essendosi dal punto G tirate per I, N le secanti GIC, GNC', e poscia le CMF, C'HF, *il punto F sarà il punto di concorso corrispondente al punto G* *. Ma si è veduto, che debba essere PT = PV, retti gli angoli PTL, PVK, e che sia dato il punto P; adunque la quistione è ricondotta alla soluzione di quest' altro

* *avv.prec.*

PROBLEMA.

Trovare sulla BQ un punto G tale, che elevate su di essa da * *G, e dal suo corrispondente punto di concorso F le perpendicolari GL, FK; ed abbassate poi le LT, KV perpendicolari alle corde PB, PQ, risulti PT = PV.*

* *fig. 9.*

ANAL. Suppongasi rinvenuto il punto G, come si è detto, e sia C'S tangente in C'; questa bisecherà la QK*. Si applichi poi al punto N la tangente NU, e si conduca UY parallela a QS. Dovendo star per dritto i punti G, U, S*, si avrà QG : GY :: SQ : UY, ovvero, presa QX = 2.UY, :: QK : QX, oppure, tirata XR parallela a KV, :: QV : QR. Adunque, dividendo, avremo QY : GY :: RV : RQ. Ciò posto si taglino le Pq, qr eguali alle PQ, QR; dovendo essere PT = PV, risulterà Tr = VR; e quindi starà QY : GY :: Tr : rq, ovvero :: Gm : mn, tirando le qn, rm parallele a GT. Sicchè si avrà QY × mn = GY × Gm.

* *c.3.l.2.*
* *lem. 3.*

Intanto essendo retti gli angoli BGL, BTL, i quattro punti B, G, T, L staranno alla circonferenza di un cerchio; e perciò si avrà l'angolo TGL = TBL = BIP. Essendo dunque GL parallela a BI, sarà GT parallela a PI; e però le rette rm, qn, essendo dati i punti m, n, saranno date di sito. Quindi mn sarà data di grandezza; e con ciò, essendo data QY, sarà dato il rettangolo di GY in Gm. In conseguenza sarà pur dato il punto G, e 'l problema avrà la seguente

Composizione.

Segnato il diametro NM parallelo a BQ, la tangente NU, e l'altra in P, che formi coll'angolo A un triangolo equiangolo ad $a'aa''$, si conduca UY parallela ad AQ. Indi presa QX doppia di UY, ed abbassata XR perpendicolare a PQ, si taglino le Pq, qr eguali alle PQ, QR. Finalmente tirate le qn, rm parallele a PI, si rinvenga il punto G tale che sia $GY \times Gm = QY \times mn$. Sarà G il punto cercato.

* *f. 1. n. 2.* Rinvenuto questo punto si tireranno le GIC, GNC'; quindi le HCL, IC'K, ed inoltre le LT, KV perpendicolari alle PB, PQ, che si produrranno finchè incontrino in D, E le PC, PC'.

I cerchi descritti intorno ai triangoli CLD, C'KE si toccheranno tra loro, toccheranno il cerchio BQH, ed i lati dell'angolo A, ed avranno per tangente comune la DE, che formerà coll'angolo stesso il triangolo A'AA'' equiangolo al dato triangolo $a'aa''$; e dovendo essere tutte le parti della figura compresa dal triangolo A'AA'' proporzionali alle parti della figura simile, che verrebbe ad esser contenuta dal triangolo $a'aa''$ colla iscri-

zione de' tre cerchi, che si sono richiesti, il problema principale rimane risoluto.

Osservazione.

Il problema di riduzione ammette com' è noto due soluzioni, e quindi due punti G, che gli sodisfano. E poichè questi due punti deggion trovarsi a parti opposte de' punti Y, m, uno cadrà al di fuori, l' altro al di dentro del cerchio BQH*; sicchè cadendo in questo secondo caso i due punti C, C' sull' arco BPQ*, i due cerchi a descriversi cadranno al di sopra dell' arco medesimo. Ed in fatti, siccome nel problema di conversione abbiamo supposto, che i cerchi dovessero essere situati al di sotto del cerchio BQH, avressimo potuto egualmente supporli al di sopra, colla condizione che avessero la tangente comune inferiore parallela ad una retta data di sito. Questa seconda soluzione però, quantunque convenga esattamente al problema di conversione, ed anche in genere al quesito principale, nella specie non gli soddisfa; dappoichè i tre cerchi risultanti da essa, riportati nel dato triangolo, non più verrebbero ad esser situati dentro il medesimo, come si è dimandato, ma prenderebbero rispetto ai suoi lati altro sito. Benvero essi toccansi sempre tra loro, e toccan pure due a due i lati del triangolo. Vale a dire i tre cerchi son tali, che si toccano tra loro, e toccano due a due tre rette date di sito. Guardata però la quistione sotto questo aspetto, si cade in un problema tutto posizionale, e vedesi chiaramente, che non più una, ma tante diverse soluzioni possa ricevere, per quan-

* fig. 10.

* cor. I. 4.

te diverse posizioni possono ammettere tre cerchi tangenti tra loro a riguardo di tre rette date di sito. Così p. e., se nel problema di conversione avessimo supposto, che non la tangente inferiore DE, ma la superiore (*) risultar dovesse parallela ad una retta data di sito, i due cerchi che fa d'uopo descrivere prenderebbero una diversa posizione; ed avendosi sempre due punti pel problema di riduzione, ciascun di essi da una diversa posizione di cerchi: e come nella prima ipotesi, così pure in questa un punto li rende inferiori al cerchio BQH *, l' altro superiori *. Per ora basta aver soddisfatto a ciò che il programma ha domandato; che non è questo il luogo da entrare in ulteriori particolari, riserbandoci di riprenderé questo argomento in altra occasione, per dare tutta la possibile estensione a questa famiglia di speciosi problemi sulle tazioni. Allora mostreremo, che il ripiego della conversione, a cui ci siamo rivolti, per la risoluzione di questo problema, sia il più analogo alla sua natura, ed il più conducente a mostrare *ad occhio*, *ed a priori* quante, e quali sieno le varie posizioni, di cui possono essere suscettivi i tre cerchi, onde adempiano alla condizione di toccarsi tra loro, e toccar due a

* *fig. 11.*
* *fig. 12.*

(*) Quando si è istituita l'analisi, supponendo, che la tangente fosse inferiore ai due cerchi (a riguardo cioè dell'angolo A) il punto P rilevato * dal concorso delle corde DC, EC′ cade, com'è chiaro sull'arco BPQ: considerando poi la tangente superiore D′E′ *, le corde D′C, E′C′ non più concorrerebbero nel punto P, ma bensì nel punto P′ sull'arco HP′H, ch'è l'altro vertice del diametro, che passa per P; mentre le tangenti, che loro corrispondono son parallele tra loro, e compiono l'una, e l'altra coll'angolo A triangoli equiangoli al dato.

* *fig. 1. n. 2.*
* *fig. 11.*

due tre rette date di sito : e si vedrà , che con una semplicissima astratta considerazione possa la Geometria soddisfare a questa ricerca, che, istituita per altre vie , aveva or fatto dire dover essere diciassette le forme diverse di soluzione , che potevansi recare al problema , ora trentadue , ed altre volte in numero ancor maggiore , senza poterlo indicare.

Non sarà superfluo avvertire , che in generale l'analisi è identica per ogni altra posizione . Ve n' ha però talune , per le quali par che essa cada in difetto ; e ciò propriamente avviene allor quando si voglia , che taluno de' contatti circolari debba riunirsi nel contatto di alcuna delle date rette , il che importa la riunione di molti de' punti , che nell' analisi sono stati considerati . Ma in queste particolari supposizioni la difficoltà del problema va sempre minorando , e co' principj stabiliti si perviene a più facili ed eleganti soluzioni. Così, p.e. , nel problema di conversione avremmo potuto supporre, che i due cerchi a descriversi fossero interni al cerchio BQP * ; ed allora è chiaro, che i loro contatti co' lati dell'angolo A sieno gli stessi punti B, Q ; i quali perciò saran dati . Quindi il problema riducesi a : *descrivere due cerchi, che si tocchino tra loro, tocchino ne' dati punti B , Q il cerchio BQP , ed abbiano una tangente comune parallela ad una retta data di sito* : del quale eccone la facilissima soluzione.

*fig. 14.

Anal. Essendo i cerchi O′, O″ toccati da BQP ne' punti B , Q , e dalla DE ne' punti D , E , le corde DB, QE si riuniranno in un punto P sulla circonferenza dell' ultimo ; e dovendo essere la tangente in P parallela a DE *, il punto P sarà dato . Inoltre dovendo PC″ toccare i due cerchi nel loro contatto C″ *, dovrà

*c.1.l.2.

*c.2.l.2.

star per dritto con AC″, che tocca, com' è chiaro, amendue i cerchi nello stesso punto C″ (*). Quindi PA sarà data di sito. Avendosi dunque AC″ = AB = AQ, il punto C″ sarà dato; e con ciò essendo data di sito la congiungente de'centri O′O″, per essere perpendicolare a PA, questi centri saran dati dalle sue intersezioni co' raggi OB, OQ. E 'l problema avrà la seguente

COMPOSIZIONE.

Condotta la tangente GP parallela alla data retta di sito, si unisca PA, e si tagli AC″ eguale ad AB. La perpendicolare condotta per C″ a PA, ovvero le rette, che bisecano gli angoli PAB, PAQ segneranno su i raggi OB, OQ i centri de' cerchi cercati.

Potrebbe anche in questo caso considerarsi la tangente comune superiore; e potrebbe anche volersi, che i due cerchi fossero esteriori a PBQ *. L'analisi, e la composizione è però sempre la stessa, dando a' punti P, e C″ il sito conveniente.

*fig. 15.

(*) Toccandosi i tre cerchi ne' punti B, Q, C″ è facile comprendere che le tre tangenti comuni in questi punti debbano riunirsi in un medesimo punto A. Ciò è chiaro nella fig. 15; ma lo è del pari nella 14; dappoichè, se suppongasi che i cerchi invece di toccarsi in B, Q, C″, s' intersecassero, si sa che le corde comuni debbono concorrere in un punto; cessando dunque i cerchi d' intersecarsi, e divenuti tangenti tra loro, le corde diverranno tangenti comuni, e non cesseranno di concorrere in un punto stesso. Ma se ciò non basti, congiungendo le AO′, AO″, si vedrà che risultando eguali le differenze de'quadrati di AO′, O′C″; e di AO″, O″C″, debba risultare AC″ perpendicolare ad O′O″, e quindi tangente all' uno, ed all' altro cerchio.

ALTRA SOLUZIONE

DEL PRECEDENTE PROBLEMA.

LEMMA 1.°

Sieno BL, QK, DE tangenti comuni di tre cerchi, che si toccano. Il rettangolo di due di esse, p.e., delle BL, QK, pareggerà quello della terza DE nel diametro del cerchio, ch' essa non tocca. * fig. 16.

Dim. Tirata la tangente $C'U$, che sarà metà di DE, si avrà $DE^2 = 4C'U^2$: ma per essere la stessa $C'U$ perpendicolare ad $O'O''$, e retto l' angolo $O'UO''$, si ha $C'U^2 = O'C'.C'O''$; sarà quindi $DE^2 = 4O'C'.C'O''$. Si otterrà in simil guisa $BL^2 = 4OC.O'C'$, e $QK^2 = 4OC.C'O''$; e però starà $DE^2 : BL^2 :: 4C'O'' : 4OC$, ovvero, $:: 4OC.C'O'' : 4OC^2$, cioè, $:: QK^2 : 4OC^2$. Risultando perciò $DE : BL :: QK : 2OC$, si otterrà $BL.QK = DE.2OC$; come si è proposto a dimostrare.

LEMMA 2.°

Sieno O, O', O'' tre cerchi, che scambievolmente si toccano, in C, C', C''; BL, QK tangenti comuni al primo ed a ciascuno degli altri due, ed NM diametro del primo parallelo a BQ. Se uniscasi QC e si distenda in Y, il punto G concorso delle corde BQ, YL starà per dritto co' punti N, C''.

Dim. — Essendo retto l' angolo QGY, si avrà $QY.YC = YG^2$;

ed essendo inoltre YC″ tangente comune de' cerchi O, O″, si ha QY.CY = YC″²; sarà quindi YG = YC″. Or si applichi in N la tangente NR; questa sarà eguale ad RC″ : ma è di più parallela ad YG; adunque i triangoli NRC″, GYC″ saranno simili, e perciò la GC″ passerà pel punto N.

Corollario 1.°

Così pure congiunta BC″, e distesa in X, il punto F concorso delle corde BQ, KX starà per dritto co' punti M, C; e perciò le NC″, MC incontrano la BQ in punti G, F tali, che le congiungenti GL, FK risultano perpendicolari alla stessa BQ, e parallele tra loro.

Corollario 2.°

Essendo le GC, FC″ perpendicolari alle QC, BC″, esse segheranno il cerchio O ne' punti I, H, estremi de' diametri che passano per Q, B; e perciò le congiungenti BI, QH saranno perpendicolari a BQ, eguali e parallele tra loro, e parallele alle GL, FK.

Avvertimento.

Le tre tangenti BL, QK, DE si distendano dall' una, e dall'altra parte, finchè s' incontrino in A, A′, A″; risulterà così un triangolo AA′A″, nel quale sono iscritti tre cerchi, che ne toccano i lati due a due, e si toccano tra loro. Or noi chiameremo per maggior chiarezza *tangenti intermedie* le BL, QK, DE; e diremo *tangenti estreme* le AB, AQ, ec. ec.

Lemma 3.°

Se iscrivasi il cerchio in un triangolo rettangolo APS, il rettangolo de' lati intorno all' angolo retto sarà quanto il doppio rettangolo de' segmenti AV, VS, ch' esso determina sulla base. * fig. 17.

Dim. — Per l'angolo retto si ha $AS^2 = AP^2 + PS^2$: ma è $AS^2 = AV^2 + VS^2 + 2AV.VS$, $AP^2 = AV^2 + VP^2 + 2AV.VP$, e $PS^2 = VP^2 + VS^2 + 2VP.VS$; risulterà dunque $AV.VS = VP^2 + AV.VP + VS.VP$. Or essendo $AP.PS = AV.VS + VP^2 + AV.VP + VS.VP$, si avrà $AP.PS = 2AV.VS$, come si è proposto a dimostrare.

Analisi per la soluzione del problema.

Sia AA′A″ il triangolo dato, ed O, O′, O″ i tre cerchi in esso iscritti secondo le condizioni del problema. * fig. 16.

Sia S il centro del cerchio iscrittibile nel dato triangolo, ed SP i tre raggi ai contatti: tenendo presente ciò che si è detto nel lemma 2, si disponga la figura come vedesi. Ciò posto si applichi ad N la tangente NU; la BN si protragga fino a GL in T; e si unisca TC″. Essendo NU eguale ad UB, e parallela a TL, sarà TL = BL, e quindi l'angolo GTB=LBT=BC″G. Perciò i quattro punti B, G, T, C″ staranno alla circonferenza di un cerchio, e l'angolo BC″T sarà retto al pari dell' opposto BGT: ma retto è pure BC″F; adunque le TC″, C″F staranno per dritto, e per le parallele GT, QH si avrà

$$GT : GF :: QH : QF \qquad (1)$$

Intanto si osservi, che i triangoli BGL, AP′Q, BQH, QFK son simili tra loro, e ad ASP. Avendosi dunque in primo luogo

$$BL : LG :: AS : AP$$

presa su di AS la $AZ = AP$, ed essendo $BL = TL$, componendo starà $GT : BL :: SZ : AS$;

d' onde si ottiene $GT.AS = BL.SZ$ (2)

Avendosi inoltre, per la somiglianza de' sopraddetti triangoli, le ragioni di $BL : BG$, di $2QA : QB$, e di $QK : QF$ eguali a quella di $AS : SP$, risulterà

$$BL + 2QA + QK : GF :: AS : SP$$

Ma si ha

$BL + 2QA + QK = AL + AK = 2AP + PL + PK = 2AP + DE$(*)

starà perciò $2AP + DE : GF :: AS : SP$

d' onde risulta $GF.AS = SP\,(2AP + DE)$ (3)

Paragonando ora (2), e (3) si ha

$$BL.SZ : SP\,(2AP + DE) :: GT : GF,$$

ovvero per l' analogia (1)

$$:: QH : QF,$$

o pe' triangoli simili BQH, QFK

$$:: BH : QK,$$

$$:: BH.BL : QK.BL;$$

ossia pel lemma 1.° $:: BH.BL : BH.DE$

$$:: BL : DE$$

$$:: BL.SZ : DE.SZ$$

Sicchè si avrà $SP\,(2AP + DE) = DE.SZ$

d' onde $SP.2AP = DE.SZ - DE.SP$

ossia $SP.2AP = DE\,(AS + AP - SP)$.

(*) È intuitivo, che sia $PL = PD$, e $PK = PE$; sicchè si ottiene $PL + PK = DE$.

Ciò posto iscrivasi il cerchio nel triangolo rettangolo APS, pel lemma 3.° dovrà essere SP.AP = 2AV.VS; ed è poi AS + AP — SP = 2AV (*); si avrà perciò 4AV.VS = DE.2AV. Vale a dire 2VS = DE. In egual modo, se iscrivansi i cerchi ne' triangoli rettangoli A'SP, A''SP si conchiuderà 2V'S = QK, e 2V''S = BL. Quindi le DE, BL, QK saran date; e pel lemma 3. risulteranno pur dati i diametri de' tre cerchi. Adunque è dato il sito de' centri, e 'l problema rimane risoluto.

La composizione risulta da per se evidente; ma dall' analisi si ha poi segnatamente un nuovo

Teorema.

Ciascuna delle tangenti intermedie è il doppio del segmento verso S determinato dal centro del cerchio iscritto in uno de' triangoli rettangoli, che risultano dalla congiungente del punto S col vertice opposto, e dalle perpendicolari abbassate dal punto medesimo su' lati adjacenti,

Altre belle verità geometriche posson dedursi da' risultamenti ottenuti, nè sarà superfluo dinotarne alcuna, anche perchè esse conducono a più eleganti costruzioni del problema di cui trattasi.

(*) È egualmente intuitivo, che iscrivendosi il cerchio in un triangolo qualunque, debba la somma di due tangenti da un vertice a' due contatti, ossia il doppio di una di esse, eguagliar la somma de' due lati, che corrispondono a quel vertice, diminuita del terzo lato.

TEOREMA 1.°

* fig. 18. *Troncando sulle tre rette , che bisegano i tre angoli di un triangolo , e verso i vertici, le porzioni AZ , $A'Z'$, $A''Z''$ eguali alle rispettive tangenti estreme* * , *corrispondenti a' vertici stessi ; cioè alle AB , $A'D$, $A''E$; i tre segmenti SZ , SZ', SZ'' risulteranno eguali tra loro .*

*avv. l. 2.

DIM. — Avendosi dall' analisi precedente

$$AS + SP - AP = 2SV = DE$$

risulterà $$AS - DE = AP - SP \quad (1)$$

Ma si ha pure $$A'D + DE + A''E = A'P + A''P \quad (2)$$

Aggregando dunque (1) con (2) avremo

$$AS + A'D + A''E = AP + A'P + A''P - SP \quad (3)$$

E così avrebbesi eziandio

$$A'S + AB + A''E = AP + A'P + A''P - SP \quad (4)$$

Come pure

$$A''S + AB + A'D = AP + A'P + A''P - SP \quad (5)$$

Confrontando questi tre ultimi numeri , p. e. (3) , e (4), per l' eguaglianza de' secondi membri , si otterrà

$$AS + A'D = A'S + AB \quad (6)$$

d' onde $$AS - AB = A'S - A'D$$

cioè $$SZ = SZ'$$

In egual modo trovandosi

$$SZ = SZ''$$

si conchiuderà

$$SZ = SZ' = SZ''$$

conforme all' enunciato.

Corollario.

Avendosi da (6)

$$AS + A'D = A'S + AB$$

si avrà

$$AS - A'S = AB - A'D \qquad (7)$$

e così pure

$$AS - A''S = AB - A''E \qquad (8)$$

non che

$$A''S - A'S = A''E - A'D \qquad (9)$$

Dalle quali tre espressioni si rileva il seguente

Teorema 2.°

La differenza tra due tangenti estreme su di un lato è quanto la differenza tra le due distanze da' vertici rispettivi al centro del cerchio iscrittibile.

Osservazione.

Da (3), (4), e (5) si ha

$$A'D + A''E = AP + A'P + A''P - SP - AS$$
$$AB + A''E = AP + A'P + A''P - SP - A'S$$
$$AB + A'D = AP + A'P + A''P - SP - A''S$$

e si ha dal corollario precedente

$$A'D - A''E = A'S - A''S$$
$$A''E - AB = A''S - AS$$
$$AB - A'D = AS - A''S$$

Quindi, aggregando le prime tre espressioni alle altre tre, ciascuna a ciascuna, otterremo

$$\left.\begin{array}{l} 2A'D = AP + A'P + A''P - SP - AS - A''S + A'S \\ 2A''E = AP + A'P + A''P - SP - A'S - AS + A''S \\ 2AB = AP + A'P + A''P - SP - A''S - A'S + AS \end{array}\right\}(10)$$

che sono identicamente quelle alle quali pervenne algebricamente il prof. Malfatti.

Sommando poi due a due le espressioni di Malfatti, e tenendo presente la figura, ne ricaveremo immantinenti le seguenti tre altre espressioni

$$\left.\begin{array}{l} AS + SP - AP = DE \\ A'S + SP - A'P = BE \\ A''S + SP - A''P = BD \end{array}\right\}(11)$$

Le quali corrispondono ad un teorema avvertito da Tedenat, e che possono così costruirsi (*).

Iscrivasi il cerchio nel triangolo $A'AA''$, e tirate al suo centro le AS, A'S, A''S, distendasi la AS fino alla circonferenza in Y: indi, centro A, ed intervallo AP, si descriva l' arco di cerchio PXP; sarà $XY = AY - AX = AS + SY - AP = AS + SP - AP$, e quindi $XY = DE$. E nell' istesso modo si costruirebbero le BE, BD sulle corrispondenti rette A'S, A''S.

Teorema 3.°

Descrivendo degli archi di cerchi aventi per centri i vertici del triangolo, e per raggi le distanze dai vertici medesimi al centro del cerchio iscrittibile, i punti medii delle rette, che es-

(*) Veggansi su tal proposito le *Considerazioni* ec. del prof. Flauti, inserito nella Parte I. delle *Produzioni sul programma* da lui proposto, pag. 62.

si due a due intercettano su ciascun lato, corrisponderanno ai punti medj delle tangenti intermedie.

Così p.e., se SM, SN sieno gli archi di cerchi descritti co' centri A', A'', e co' raggi A'S, A''S; il punto U medio di MN corrisponderà al punto medio di DE.

Dim. — Essendosi dimostrato nel teorema 2°, che la differenza delle A''E, A'D sia quanto la differenza delle A''S, A'S, le quali or sonosi fatte respettivamente eguali alle A''N, A'M, risulterà la differenza di queste, ossia quella delle A''M, A'N pari alla differenza delle A''E, A'D. Quindi si avrà la differenza delle A''M, A''E eguale a quella delle A'N, A'D, cioè sarà ME eguale a DN. E perciò il punto U, medio di NM, sarà pure il punto medio di DE.

Corollario.

Risulta da ciò, che i punti medj delle tangenti intermedie si ottengono indipendentemente dalle tangenti stesse. E per determinare, p.e., il punto medio di DE basterà prendere le A'M, A''N eguali respettivamente alle A'S, A''S; perchè il punto U, medio di MN, sarà pure il punto medio di DE. In egual guisa si otterrebbero i punti medj di BE, BD.

In conseguenza delle proprietà esposte, potrà darsi al problema di cui trattasi, la seguente

Costruzione.

Bisecati gli angoli del triangolo con le AS, A'S, A''S, ed abbassata SP perpendicolare ad un de' lati, p. e., AA'', iscri-

vasi il cerchio nel triangolo ASP ; indi prese le A'M, A''N eguali alle A'S , A''S , e bisecata MN in U , si taglino le UD, UE egnali ciascuna ad SV . Fatta inoltre A'Z' eguale ad A'D, SZ eguale ad SZ', ed AB eguale ad AZ, si tirino ad AA', A'A'' le perpendicolari BO , DO', EO''. Saranno queste i raggi de' tre cerchi , ed O , O' , O'' ne saranno i centri .

RIFLESSIONI

SULLE DUE PRECEDENTI SOLUZIONI DI NICOLA TRUDI AL QUESITO II. DEL PROGRAMMA.

Si è già detto, nella parte I. di queste *Produzioni sul programma*, come avesse avuto origine il problema geometrico che vi si proponeva per secondo quesito; a che conviene aggiugnere un tipo di esso trovarsi già presso Frate Luca, ed è il problema I. della *Distinzione* VIII. del suo *Trattato di Geometria*, nel quale proponevasi egli: *collocare in un triangolo isoscele di cui la base sia maggiore di ciascun lato tre circoli uguali, e maggiori che si possa*; e ne recava la soluzione, che tradotta in linguaggio algebrico è la seguente.

Sia BAC il triangolo proposto, la cui base BC si dinoti per b, e ciascun lato BA, AC per l: M, O, N sieno i tre circoli iscrittivi, di cui ciascun diametro si esprima per $2x$, e compiasi la figura. Sarà anche ciascuna delle MO, ON $= 2x$. Inoltre l' altezza del proposto triangolo verrà dinotata da $\sqrt{(l^2 - \frac{1}{4} b^2)}$, quella dell' altro MON, che gli è simile, il sarà da $\sqrt{(4x^2 - \frac{b^2}{l^2} x^2)} = x \sqrt{(4 - \frac{b^2}{l^2})}$. Di più ciascuna delle quattro rette uguali CQ, CS, BP, BV sarà espressa da $(\frac{1}{2} b - \frac{b}{l}) x$; e ciascuna delle altre due pur eguali AR, AT lo sarà da $l - 2x - (\frac{1}{2} b - \frac{b}{l} x) = l - \frac{1}{2} b - 2x + \frac{b}{l} x$. *fig. 19.*

Ottenute le espressioni di queste rette, risulterà

l'aja dell' intero triangolo $ABC = \frac{1}{2} b \sqrt{(l^2 - \frac{1}{4} b^2)}$:

la somma de' due rettangoli $VMOT + NORS = 4x^2$

l' altro rettangolo $MIQN = 2x^2 \frac{b}{l}$

la somma de' quattro triangoli $QNC + NCS + PMB + MBV = bx - 2x^2 \frac{b}{l}$

quella de' due altri $ORA + OAT = lx - \frac{1}{2} bx - 2x^2 + x^2 \frac{b}{l}$

ed il triangolo $MON = x^2 \frac{b}{l} \sqrt{(4 - \frac{b^2}{l^2})}$.

Dà che otterrassi pel problema la seguente equazione

$$\left(2 + \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \sqrt{(4 - \frac{b^2}{l^2})}\right) x^2 + (\frac{1}{2} b + l) x = \frac{1}{2} b \sqrt{(l^2 - \frac{1}{4} b^2)}$$

E mettendo $l = 10$, $b = 12$, come adoperava Frate Luca, cui non era ignoto l' artifizio di risoluzione, ch' ebbe poi tanto onorato il Vieta, ma sì bene l' arte simbolica, per render breve, e generale il ragionamento analitico, e lo stabilimento dell' equazione, si otterrà secondo lui

$$5 \frac{3}{25} x^2 + 16x = 48 \text{(*)}$$

d'onde $$x = 3 \frac{3}{4}$$

Supponendo equilatero il triangolo, l' equazione ridurrebbesi a $$(3 + \sqrt{3}) x^2 + \frac{3}{2} lx = \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$$

(*) La recata analisi del problema non è, che il ragionamento di Frate Luca tradotto in linguaggio algebrico; che ben più facilmente poteva ottenersi la chiesta soluzione.

ed i tre cerchi descritti dentro di esso si toccherebbero scambievolmente.

Or senza dire ciò, che questo nostro antico analista, cui ben più deve la scienza di quello che comunemente gliesene attribuisca, soggiunse in seguito per altre iscrizioni simili di cerchi nel cerchio, chi non avrebbe ravvisato presso lui il problema dal Malfatti la prima volta proposto, e risoluto, se le opere di que' nostri primi itali maestri non fossero divenute pure archeologiche speculazioni; e se or più che mai la scienza nostra non si limitasse alla semplice lettura de' libri del dì di jeri, prendendosi però ogni cosa che vi si rechi per nuova? Di che ben con ragione si dolgono coloro la cui cultura nelle matematiche è già divenuta di antica data.

Si è pur detto nel luogo stesso della parte precedente quanto occorreva circa i tentativi fatti, per dare della soluzione del Malfatti un' analisi più diretta, non potendo certamente riescire a grado de' moderni geometri quella trasmutazione, che nel corso della medesima egli fa dall' andamento di ricerca a quello di dimostrazione, che riducesi poi piuttosto ad una verifica. E nell' esporre partitamente, compendiandola, tal sua soluzione, si è pur mostrato come in essa chiaramente si contenessero alcune verità, di una delle quali, posteriormente, prendendole a riduzione del problema, se n' era dimandata la dimostrazione indipendente da quell' analisi, ed inutilmente forse da molti ricercata. In somma si è ivi esposto quanto di tentativi algebrici si era fatto su tal problema, alcun de' quali non vedendosene eseguito da' coltivatori del modernissimo metodo a coordinate, non escluso il Gergonne, che n' era grande ed utile promoto-

re, fa dubitare, che il problema siavisi dimostrato riluttante, togliendo così a quel metodo la generalità che vorrebbe attribuirsegli, e che ne dovrebbe costituire la qualità principale.

Finalmente nel luogo stesso erasi già recata in abbozzo la soluzione geometrica del problema presentata dal Paucker, alla quale convien che si paragonino le due del Trudi, che sono state giudicate degne del premio proposto.

Or la prima di esse, quella che venne da costui consegnata al segretario perpetuo della nostra Accademia, all'epoca stabilita, ha un'analisi breve e piana, fondata su di una semplice conversione del problema proposto, che avrebbe dovuto presentarsi facilmente ad altri risolutori del medesimo; ed essa non ha bisogno che di sole quattro verità geometriche, le quali non sono già solamente proprie ad una tal ricerca, ma da servire benanche in altre di contatti di cerchi con rette. La costruzione ne risulta assai agevole, e però ad una tal soluzione non può negarsi la caratteristica di una grandissima eleganza, ch'era ciò che da' moderni geometri richiedevasi, dopò ottenuta la soluzione geometrica del Paucker, che aveva in parte soddisfatto a' loro desiderj.

Nè credo fuori di proposito avvertire, che una tal soluzione ismentisca evidentemente, ciò che fu con poca considerazione propalato nella *risposta* al programma pubblicata dal sig. Padula, *che qualunque soluzione si darà mai del presente problema si potrà sempre facilmente ricavare dalle equazioni da lui in risolverlo rilevate*. Su di che non istimo convenevole di ulteriormente insistere. Ha ancora una tal soluzione, come lo stesso autor di essa accenna, la prerogativa di mostrare qua-

si che per intuizione quante e quali soluzioni possa ricevere il problema, considerato non già nella forma proposta, ma nell' aspetto generale di tre rette, che debbano due a due esser toccate da ognuno de' tre cerchi che tra loro si tocchino; e per ciascuna di tali soluzioni i due casi che le corrispondono. Di che egli ha creduto poter per ora bastare il semplice saggio che ne presenta, notando un caso particolare, nel quale la soluzione del problema dee ricevere una necessaria modificazione, per la qualità de' contatti.

Ma dopo ciò, il Trudi medesimo, ulteriormente occupatosi a trattare lo stesso problema, essendo riescito ad ottenerne altra soluzione geometrica indipendente affatto dalla già presentata, si affrettò a consegnarmela direttamente; ed io credendola ben degna dell' attenzione de' geometri, ho stimato conveniente pubblicarla in seguito della prima.

Di quest' altra soluzione più diretta n' è l' analisi, non essendovi bisogno di quel ripiego di conversione adoperato per la prima; e le verità nuove ch' ei vi discopre nel corso della medesima, oltre alla loro importanza, conducono ad una costruzione semplice, ed elegante. Del tutto nuove, ed interessanti sono ancora le proprietà geometriche de' contatti dimostrate ne' lemmi ch' ei premette a tal sua soluzione, e che nulla hanno anche di comune con l' altra già data.

Finalmente coloro i quali desideravano veder dimostrata geometricamente la verità, che dal Tedenat era stata rilevata dall' analisi dal Malfatti, e da me dinotata nelle *Considerazioni* a pag. 62., dalla quale una semplice e diretta soluzione del problema ottenevasi, rimarranno soddisfatti, non pur dal vede-

re essersi ciò dal Trudi facilmente conseguito in questa sua soluzione : ma ancora dall' osservarne altra , che con più semplicità vi soddisfa, e della quale più comoda n' è l' esposizione.

In somma a conchiuderla brevemente, con la proposta da me fatta di questo problema , la Geometria non pur ne ha conseguito due elegantissime soluzioni del medesimo ; ma si è arricchita di nuove importanti verità , che non dubito vederle utilmente adoperate in nuove ricerche ; ed alle quali senza questa occasione , in altro modo non sarebbesi mai pensato : senza dire di tutto quell' altro materiale di verità nuove , che al Trudi sonosi presentate nel cammino arduo di sue ricerche per l' analisi di tal problema , e che serba ad altro uso . E ciò combina con quello ch' è stata da me detto nelle *Considerazioni* ; ed è ancor comprovato da' tentativi fatti per lo stesso oggetto da' prof. Francesco Grimaldi , e Giacomo de Sanctis (*) , che sebbene rimasti infruttuosi per la richiesta soluzione , non lo sono però stati per la Geometria.

(*) Il nostro prof. Grimaldi , assai versato nell' antica e nella moderna analisi , e gran prometere di esse co' suoi studj , e con le sue geometriche elucubrazioni , delle quali a vantaggio della scienza in appresso ne pubblicherà alcuna , mi ha presentati i suoi tentativi per risolvere il problema del Malfatti , che non sarebbero rimasti infruttuosi , se egli non avesse desistito dal continuarli , avendo osservate le soluzioni già fatte dal suo collega Trudi . Ed il prof. de Sanctis , che con buon successo istituisce la gioventù nelle Matematiche , nella sua provincia del Contado di Molise , ed in quel Collegio Sannitico , mi ebbe pur inviati i suoi , che se non bastarono a fargli ottenere la desiderata soluzione , mostravano esser però feraci di belle verità nuove , nel cammino di essa rilevate .

Fig. 1.
V'
v'
C
B
K
u'
∂
u
M
N
A
P
O
S
E
V
U
U'
T
Z'
R
Z
D
z

Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4

Fig. 1.
N.1
a
q
b
o
k
l
o'
o''
a'
d
e
a''
N.2
A
P
F
Q
B
G
M
O
N
H
T
V
I
C
C'
K
L
O'
O''
R
C''
X
Y
A'
D
E

Fig. 2.
A
C
B
I
L
A'
Y
O
C
O'
H
Q
Fig. 3.
X
O"
b
C'
C"
l
X'
O
O'
B
I
Fig. 4.
X
O"
C'
C"
Z
O
C
O'
B
S
L
Fig. 5.
A
Q
B
P
G
U
S
R
N
C
Fig. 6.
Q
S
V
U
G
B
C
S

G
B
Q
F
N
O
M
Fig.7.
I
K
H
C'
C
C
C'
B
G
F
Q
Fig.8.
N
O
M
I
H
A
Fig.9.
P
G
Y
B
Q
F
T
U
N
O
M
R
X
S
V
I
H
L
C
P'
C'
K

Opuscoli mat.

Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.